EXTRAIT

NB : *J'ai modifié l'énoncé de la question marquée en bleu.*

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel, avec $n \geqslant 2$. On munit le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalier canonique noté $(.|.)$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $v_k = e_k - e_{k+1}$.

On note H la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par : $H = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 + \cdots + x_n = 0\big\}$.

1. Structure de H

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 + \cdots + x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

1.1. Vérifier que ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

1.2. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

2. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est une base de H.

3. Construction d'une base orthogonale de H

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on pose* $F_k = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ *et on note* p_k *la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel* F_k.

3.1. Montrer que, pour tout $(j,k) \in \{1, \ldots, n-1\}^2$, $(v_j|v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si } \ k \in \{j-1, j+1\}, \\ 2 & \text{si } \ k = j, \\ 0 & \text{si } \ k \notin \{j-1, j, j+1\}. \end{cases}$.

3.2. Considérons la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \forall\ k \in \{2, \ldots, n-1\}, \ \varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k) \end{cases}$$

Montrer que

i) $\forall\ k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $vect(v_1, \ldots, v_k) = vect(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$

ii) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ est une famille orthogonale de H.

3.3. Détermination de ε_k pour $k \in \{2, \ldots, n-1\}$

Soit $k \in \{2, \ldots, n-1\}$; on pose $\varepsilon_k = v_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j\, v_j$.

(i) Montrer que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_k X = B_k$, où $A_k = \big((v_j|v_\ell)\big)_{1 \leqslant j,\ell \leqslant k-1}$ est la matrice de Gram associée à la famille $(v_1, \ldots, v_{k-1})$, et B_k désigne le vecteur colonne de composantes $(v_1|v_k), \ldots, (v_{k-1}|v_k)$.

(ii) Montrer que le système $A_k X = B_k$ s'écrit $\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \quad\vdots & \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}$.

(iii) Résoudre le système $A_k X = B_k$ et en déduire que $\varepsilon_k = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}, -1, 0, \ldots, 0)$, le -1 étant situé à la $(k+1)-$ième place.

4. Donner une base orthonormée de H.