Correction

Préliminaire :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{i(a+k\varphi)} = \mathrm{e}^{ia}\frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\varphi}}{1-\mathrm{e}^{i\varphi}} = \mathrm{e}^{ia}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\varphi}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{n+1}{2}\varphi}-\mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}\varphi}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{2}}\right)} = \mathrm{e}^{i(a+\frac{n}{2}\varphi)}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Puis, en passant à la partie réelle, la relation proposée.

Problème

1.a $z^5+1=0 \Leftrightarrow z^5=\mathrm{e}^{i\pi}$. Posons $z_0=\mathrm{e}^{i\pi/5}$.

$z^5+1=0 \Leftrightarrow z^5=z_0^5 \Leftrightarrow (z/z_0)^5=1$.

Posons $\omega_k=\mathrm{e}^{2ik\pi/5}$ de sorte que $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ désignent les racines 5ième de l'unité.

$z^5+1=0 \Leftrightarrow z/z_0=\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3$ ou ω_4.

Finalement $\mathcal{S}=\left\{z_0,z_0\omega_1,z_0\omega_2,z_0\omega_3,z_0\omega_4\right\}=\left\{\mathrm{e}^{i\theta},\mathrm{e}^{3i\theta},\mathrm{e}^{5i\theta},\mathrm{e}^{7i\theta},\mathrm{e}^{9i\theta}\right\}$.

1.b $z^5+1=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)$.

1.c Soit z solution de l'équation $z^4-z^3+z^2-z+1=0$.

Nécessairement $z\neq 0$ et on peut donc introduire $Z=z+\dfrac{1}{z}$.

On remarque que $Z^2=z^2+2+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{z^4+2z^2+1}{z^2}$ puis que $Z^2-Z-1=\dfrac{z^4-z^3+z^2-z+1}{z^2}=0$.

Les racines de l'équation $Z^2-Z-1=0$ sont $Z_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ et $Z_2=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$.

Par suite z est solution de : $z^2-Z_1z+1=0$ ou de $z^2-Z_2z+1=0$.

Les racines de $z^2-\dfrac{1+\sqrt5}{2}z+1=0$ sont $z_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}+i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{2}, z_2=\dfrac{1+\sqrt5}{2}-i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{2}$.

Les racines de $z^2-\dfrac{1-\sqrt5}{2}z+1=0$ sont $z_3=\dfrac{1-\sqrt5}{2}+i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{2}, z_4=\dfrac{1-\sqrt5}{2}-i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{2}$.

Inversement :
On a vu précédemment que l'éq $z^5+1=0$ possède cinq solutions. Or $z^5+1=(z+1)Q(z)$ et l'équation $z+1=0$ possède $z=-1$ pour seule solution, donc on peut affirmer que l'équation $Q(z)=0$ possède au moins quatre solutions. Comme précédemment, nous n'avons vu que quatre solutions possibles, on peut affirmer que celle-ci sont effectivement solutions.

1.d On a $\left\{\mathrm{e}^{i\theta},\mathrm{e}^{3i\theta},\mathrm{e}^{5i\theta},\mathrm{e}^{7i\theta},\mathrm{e}^{9i\theta}\right\}=\left\{-1,z_1,z_2,z_3,z_4\right\}$.

Comme $3\theta,5\theta,7\theta\in[\pi/2,3\pi/2]$, les solutions $\mathrm{e}^{3i\theta},\mathrm{e}^{5i\theta},\mathrm{e}^{7i\theta}$ sont de parties réelles négatives.

En les éliminant : $\left\{\mathrm{e}^{i\theta},\mathrm{e}^{9i\theta}\right\}=\left\{z_1,z_2\right\}$ et comme $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ on peut conclut : $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt5}{4}$.

2.a $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$, $\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$.

2.b $5\theta=\pi$ donc $\cos 4\theta=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ d'où $\cos\theta$ est solution de l'équation $8x^4-8x^2+x+1=0$.

2.c $8x^4-8x^2+x+1=(x+1)(8x^3-8x^2+1)=(x+1)(x-1/2)(8x^2-4x-2)$.

$8x^4-8x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1/2$ ou $4x^2-2x-1=0$.

Les racines de $4x^2-2x-1=0$ sont $x_1=\dfrac{1+\sqrt5}{4}$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt5}{4}$.

Finalement l'ensemble solution de l'équation $8x^4-8x^2+x+1=0$ est $\{-1, 1/2, x_1, x_2\}$.
Parmi ces solutions figure $\cos\theta$.
Puisque $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right[$ on a $\cos\theta\in\left]\frac{1}{2},1\right]$. La seule solution de l'équation appartenant à $\left]\frac{1}{2},1\right]$ est x_1.
A nouveau $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

3.a $\cos\theta+\cos 3\theta=C(\theta,2\theta,1)=\cos 2\theta\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 4\theta}{2\sin\theta}$ or $\sin 4\theta=\sin(5\theta-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ donc $\cos\theta+\cos 3\theta=1/2$.

3.b $\cos\theta\cos 3\theta=\frac{1}{2}\left(\cos(\theta+3\theta)+\cos(\theta-3\theta)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4\theta+\cos 2\theta\right)=-\frac{1}{2}(\cos\theta+\cos 3\theta)=-\frac{1}{4}$.

3.c $\cos\theta$ et $\cos 3\theta$ sont solution de l'équation $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$ soit encore $4x^2-2x-1=0$.
Cette dernière a précédemment été résolue et $\cos\theta$ apparaît comme étant sa seule solution positive.

4.a $1+\cos 2\theta+\cdots+\cos 8\theta=C(0,2\theta,4)=\cos(4\theta)\frac{\sin(5\theta)}{\sin(\theta)}=0$.

4.b On a $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$, $\cos 4\theta=-\cos\theta$, $\cos 6\theta=\cos(2\pi-6\theta)=\cos 4\theta=-\cos\theta$ et $\cos(8\theta)=\cos(2\pi-8\theta)=\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$.
En injectant ceci dans la relation précédente on obtient $4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$.
On retrouve l'équation déjà résolue et on conclut comme précédemment.