EXERCICE

Extrait du CNC 2013 - Maths 2 - Option MP

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note λ_1,λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.
2. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, déterminer le vecteur propre e_k de u associé à la valeur propre λ_k et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.
3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1}.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.
   (a) Justifier que $v^2 + 3v = u$.
   (b) Vérifier que $uv = vu$ et en déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$,le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k,conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.
   (c) On pose $V = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Expliciter Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ainsi que celle de la matrice B. La relation $B^2+3B = A$ est équivalente à $V^2 + 3V = \Delta$.
   Et cette dernière relation est équivalente à $\alpha_1^2+3\alpha_1 = 10$, $\alpha_2^2+3\alpha_2 = 4$ et $\alpha_3^2+3\alpha_3 = 0$, après la résolution de ces équations, on obtient $\alpha_1 = -5$ ou 2, $\alpha_2 = -4$ ou 1, et $\alpha_3 = 0$ ou -3.
   (d) Combien de solutions l'équation $X^2 + 3X = A$ admet-t-elle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?