Problème

Partie 1

1. Soit $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b[$. On suppose que $g(a) = g(b) = 0$ et $g'(a) = 0$.

Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(c)}{c - a}$.

2. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dans $\mathbf{R}^+$. On suppose en outre que f' est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f'(x) \geqslant 0$.

a. Montrez que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$$

b. Soit $(s_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$.

Montrez que (s_n) est convergente *si et seulement si* f a une limite réelle, notée ℓ, en $+\infty$.

c. Application :

Etudiez les suites définies par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k}}.$$

Partie 2

Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $b \in \mathbf{R}$, un réel fixé.

On définit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = g(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\, g^{(k)}(x) + C\, \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{où } C \text{ est un réel fixé.}$$

3. Montrez que φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}\left[g^{(n+1)}(x) + C\right]$$

4. Formule de Taylor

Soit $a \in \mathbf{R}$ un réel fixé. En choisissant «*judicieusement*» la constante C, montrez l'existence d'un réel c compris entre a et b tel que

$$g(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, g^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, g^{(n+1)}(c)$$

5. Application :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose

$$M_0 = \sup_{\mathbf{R}} |f| \ \text{ et } \ M_2 = \sup_{\mathbf{R}} |f''|.$$

a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrez que pour tout $h \in \mathbf{R}$, on a

i) $-f(x) \leqslant M_0 + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}M_2$

ii) $f(x) \leqslant M_0 + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}M_2$

Indication : appliquez la formule de Taylor ci-dessus entre x et $x+h$ d'une part, et x et $x-h$ d'autre part.

b. Déduisez-en que f' est bornée sur $\mathbf{R}$ et que si l'on note $M_1 = \sup_{\mathbf{R}} |f'|$, on a $M_1^2 \leqslant 2\, M_0 M_2$.

Fin