

Travaillez ce qui est marqué

La solution est en bas

INTÉGRALES IMPROPRES

Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$

d) $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$

f) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$

i) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$

Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.

a) Montrer que f' est de carré intégrable.

b) Montrer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 4 :

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} dt$

2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$$

Exercice 5 : (Intégrales de Bertrand)

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ converge}$$

2) Montrer que

$$\forall \alpha \prec 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ diverge}$$

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta \succ 1$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

c) $\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$

d) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$

Exercice 7 :

a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

b) Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

puis donner la valeur de I .

Exercice 8 :

- a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$$

Pour $x > 0$, on pose

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$$

- b) On rappelle
- $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$
- . Établir que

$$I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- c) En déduire la valeur de
- I
- .

Exercice 9 :

- a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}$$

- b) Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- . Établir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$$

- c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

Établir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}$$

- d) Trouver une relation de récurrence entre
- W_n
- et
- W_{n+2}
- .
-
- En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n + 1)W_n W_{n+1}$$

- e) Donner un équivalent de
- W_n
- et en déduire la valeur de
- I
- .

Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

C'est étudier si l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ converge ou pas.

D'abord la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est CPM sur $]0, 1[$.

Autour de 0 :

Étudions la convergence de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$.

On a $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}}$ ($(1-t) \sim 1$ car $\lim_{t \rightarrow 0} (1-t) = 1 \neq 0$)

Alors $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ converge. $\square$

Autour de 1 :

Étudions la convergence de $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$.

On a $\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \sim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1-t}$ ($\sqrt{t} \sim 1$ car $\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} = 1 \neq 0$)

Alors $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-t} dt$ sont de même nature.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

ii) $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

On $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)} dt$ diverge, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 1 \not< 1$)

Donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ diverge. $\square$

Enfin, $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ diverge.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ convergent} \right)$$

1) Au voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } \frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2}$$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ sont de même nature.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}(\ln t)^{-2}}} dt.$$

Soit $1 < \alpha < 2$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2-2} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(par croissance comparée au voisin de $+\infty$, et vu que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2-2} = 0$)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^d}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^d}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^d} dt$ converge (Riemann, avec $d > 1$)

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge.

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge

2) Au voisinage de 0

$$\text{On a } \frac{\ln t}{t^2+1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$$

Donc $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ et $\int_0^1 \ln t dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^1 \ln t dt$ converge (du Cours)

Alors $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge

Enfin

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt \text{ converge}$$



$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ est CPM sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Or Cette fonction est **paire**, alors pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$

Converge, il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ étant CPM sur $[0, +\infty[$, alors on étudiera juste au voisinage de $+\infty$.

$$\text{On a } (1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^2$$

Et on a aussi $\ln(1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t^2)$ car :

$$\frac{\ln(1+t^2)}{\ln(t^2)} = \frac{\ln(t^2(\frac{1}{t^2} + 1))}{\ln(t^2)} = 1 + \frac{\ln(\frac{1}{t^2} + 1)}{\ln(t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{D'où } \ln(1+t^2) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln t$$

Par suite $\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln t}{t^2}$

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2 \ln t}{t^2} dt$ sont de même nature.

Pour la 2^{ème}, on pense à la technique de Bertrand.

On a $\frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^2 (\ln t)^{-1}}$

Soit $1 < \alpha < 2$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \cdot \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-2} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(par croissance comparée au voisin de $+\infty$, et vu que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-2} = 0$)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln t}{t^2}}{\frac{1}{t^\alpha}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge (Riemann, avec $\alpha > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge.

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ converge.

$$d) \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

La fonction $t \mapsto \ln(t) \cdot e^{-t}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

1) Au voisinage de 0

$$\ln t \cdot e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t \quad \left(\text{car } e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \right)$$

Or $\int_0^1 \ln t \, dt$ converge (dr. Coms)

Alors $\int_0^1 \ln t \cdot e^{-t} \, dt$ converge

2) Au voisinage de $+\infty$

Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot (\ln t \cdot e^{-t}) = 0$

$$\text{D'où } \ln t \cdot e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)_{t \rightarrow +\infty}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge

Alors $\int_1^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t} \, dt$ converge.

En fin

$$\int_0^{+\infty} \ln t \cdot e^{-t} \, dt \text{ converge.}$$



$$e) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

1) Au voisinage de 0

$$\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}} \quad \left(\text{car } \ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \right)$$

Donc $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt$ converge (Riemann : $\frac{1}{2} < 1$)

$$\text{Donc } \boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt \text{ converge.}}$$

2) Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^{3/2}}, \quad \text{car } \ln(1+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln t \text{ puisque :}$$

$$\frac{\ln(1+t)}{\ln t} = \frac{\ln(t(1+\frac{1}{t}))}{\ln t} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\ln t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} dt$ sont de même nature.

Soit $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \cdot \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha - \frac{3}{2}} \cdot \ln t$$

$$= 0$$

(car $\alpha - \frac{3}{2} < 0$ et par)
(Croissance comparée)

D'où $\frac{\ln t}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge (Riemann : $\alpha > 1$)

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} dt$ converge

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$ converge.

Enfin $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$ converge.

f) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

Av voisinage de $+\infty$:

Étudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

On a $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ (car $\frac{1}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$)

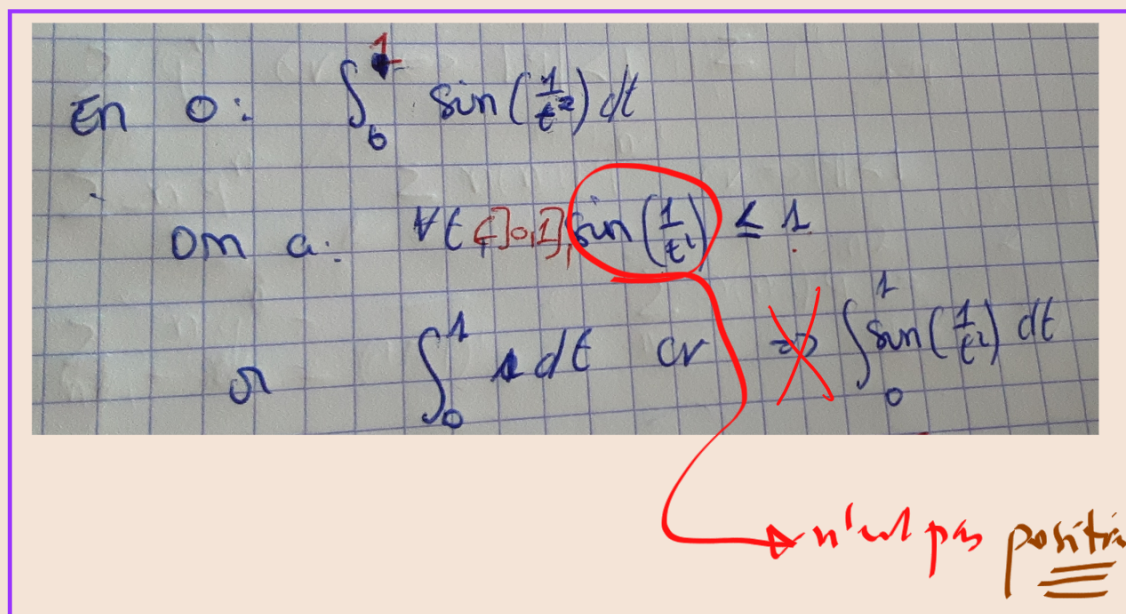
D'où $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ sont de même nature.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge. $\square$

Av voisinage de 0 :

Étudions la convergence de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.



On a : $\forall t \in]0, 1], |\sin(\frac{1}{t^2})| \leq 1$

Or $\int_0^1 1 dt$ converge

Alors $\int_0^1 |\sin(\frac{1}{t^2})| dt$ converge

Par suite $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t^2}) dt$ converge (car ACV $\Rightarrow$ CV) □

En fin, $\int_0^{+\infty} \sin(\frac{1}{t^2}) dt$ converge

Exercice Cousin :

Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n^2})$?

Réponse

On a $\sin(\frac{1}{n^2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

Alors les séries $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n^2})$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont de même nature.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, comme série de Riemann ($d=2 > 1$)

Donc $\sum_{n \geq 1} \sin(\frac{1}{n^2})$ converge □

$$g) \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

À u voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } (1+t^2) \underset{+\infty}{\sim} t^2$$

$$\text{Alors } \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$$

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$ sont de même nature.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} = 0$ par Croissance Comparée.

$$\text{D'où } \lim_{+\infty} \frac{\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}}{\frac{1}{t^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \underset{+\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

On $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann; $2 > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$ converge.

Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ converge.

Enfin

$$\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt \text{ converge.}$$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ nature ?

La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0 ?

On a $(e^t - 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ alors $\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$

Or $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 1 > 1$)

D'où $\int_0^1 \frac{1}{e^t - 1} dt$ diverge.

Enfin $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} dt$ diverge.

$$i) \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}$ est CPM sur $]0, 1[$.

1) Au voisinage de 0

$$\sqrt{(1-t)^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$$

Or $\int_0^{1/2} \ln t \, dt$ converge (du cours)

Alors $\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \, dt$ converge.

2) Au voisinage de 1

On a $\ln t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (t-1)$ (équivalent usuel)

$$\text{Alors } \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{(t-1)}{\sqrt{(1-t)^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} - \frac{(1-t)}{(1-t)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} - \frac{1}{(1-t)^{1/2}}$$

$$\text{Or } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} dt \text{ Converge}$$

$$\text{Alors } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ Converge.}$$

$$\text{Enfin, } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ Convergent.}$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \text{ Converge.}$$



Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes
(et donc convergentes) :

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$$

Solution

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}$ est CPM sur $[1, +\infty[$.

$$\forall t \in [1, +\infty[, \left| \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha > 1$)

Alors $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} \right| dt$ converge.

Càd $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ est ACV.

Exercice (très classique)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes
(et donc convergentes) :

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha}$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\lambda n)}{n^\alpha}$$

$$3) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{i\lambda n}}{n^\alpha}$$

Solution

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \text{ ACV ?}$$

$$\text{On a : } \forall n \geq 1, \left| \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{Or la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV (Riemann : } \alpha > 1)$$

$$\text{Donc la série } \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \right| \text{ converge}$$

$$\text{Càd } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\lambda n)}{n^\alpha} \text{ est ACV.}$$

Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais pas absolument.

Solution

1) M. que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

2) d'abord la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

a) Au voisinage de $+\infty$

M. que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

On fait via l'intégration par parties.

$$\text{On a } \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^{+\infty} (-\cos t)' \times \frac{1}{t} dt$$

et les fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

On a que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\cos t) \times \frac{1}{t}$ existe car $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\cos t) \times \frac{1}{t} = 0$.

D'où les deux intégrales impropres $\int_1^{+\infty} (-\cos t)' \times \frac{1}{t}$, qui est $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

et $\int_1^{+\infty} (-\cos t) \times \left(\frac{1}{t}\right)' dt$ sont de même nature.

Càd $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge car ACV, on fait que :

$(\forall t \in [1, +\infty[, |\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2})$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ CV (Riemann : 271)

2) On $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ Converge. $\square$

b) Au voisinage de 0

On que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est Convergente.

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \in \mathbb{R}$$

2) On $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est Convergente. $\square$

Enfin $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est Convergente.

1) On que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas ACV

C'est à dire $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge.

On a $\int_0^1 \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ converge (car $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\sin t}{t} \right| = 1$)

Alors on montre que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge.



Clé

$$\text{On a : } (\forall t \in [1, +\infty[, |\sin t|^2 \leq |\sin t|)$$

$$\Rightarrow \forall t \in [1, +\infty[, \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t}$$

$$\text{Or } \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} , \text{ par linéarisation on } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t .$$

$$\text{Alors } \left(\forall t \in [1, +\infty[, \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall t \in [1, +\infty[, \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2t)}{t} \right)$$

$$\text{On a } \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt \text{ diverge (Riemann : } \alpha = 1 < 1)$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \text{ converge (via une IPP, comme fait plus haut)}$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(2t)}{t} \right) dt \text{ diverge}$$

$$\text{Par suite } \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \text{ diverge.}$$

$$\text{Enfin } \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \text{ diverge.}$$



Exercice 4 :

- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} dt$

1) a) Pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \\ \text{et} \\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \end{cases}$$

i) Au voisinage de 1

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(t-1)^b} \quad \text{car } t^a \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \quad \left(\lim_{t \rightarrow 1} t^a = 1 \text{ par exemple} \right)$$

D'où :

$$\int_1^2 \frac{1}{t^a(t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{1}{(t-1)^b} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow b < 1 \text{ (Riemann)}$$

ii) Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{t^a(t-1)^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^a \cdot t^b} \sim \frac{1}{t^{a+b}} \quad \text{car } (t-1)^b \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^b$$

Dm :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a (t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{a+b}} dt \text{ converge}$$
$$\Leftrightarrow a+b > 1 \text{ (Riemann)}$$

Enfin :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a (t-1)^b} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b > 1 \\ \text{et} \\ b < 1 \end{cases}$$



2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$$

Est $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ existe} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge}$$

1) Au voisinage de 0

$$\text{On a } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} ?$$

$$\text{On a } \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \Rightarrow (t - \sin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{6}$$

$$\text{Donc } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{6t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t^{\alpha-3}}$$

$$\text{Alors } \int_0^1 \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 3 < 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 4$$

2) Au voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } \frac{t - \sin t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow ?$$

On a $(t - \sin t) \sim t \cos$ $\begin{cases} t \rightarrow +\infty \\ \sin t \text{ borné} \end{cases}$

2^o on $\frac{t - \sin t}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$ converge

$\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1$

$\Leftrightarrow \alpha > 2$

2^e on fin :

$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$ existe $\Leftrightarrow \alpha < 4$ et $\alpha > 2$

Cacl :

$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$ existe $\Leftrightarrow 2 < \alpha < 4$



Exercice 5 : (Intégrales de Bertrand)

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha > 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ converge}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha'} (\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

Soit $1 < \alpha' < \alpha$.

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha'} \cdot \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{1}{(\ln t)^\beta}$$

$= 0$ car $\alpha' - \alpha < 0$ et par croissance comparée.

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}}{\frac{1}{t^{\alpha'}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha'}}\right)_{+\infty}$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}} dt$ converge, car $\alpha' > 1$

Alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ converge



2) Montrer que

$$\forall \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \text{ diverge}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2, +\infty[$.

Soit $\alpha < \alpha' < 1$.

$$\text{On a } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha'} \cdot \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha' - \alpha} \cdot \frac{1}{(\ln t)^\beta}$$

$= +\infty$ car $\alpha' - \alpha > 0$ et par croissance comparée.

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}}{\frac{1}{t^{\alpha'}}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t^{\alpha'}}}{\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^{\alpha'}} \underset{+\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \right)$$

$$\text{Or } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}} dt \text{ diverge (car } \alpha' < 1)$$

Alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 (\ln t)^\beta} dt$ diverge. 

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \beta > 1$$

Rédaction à venir !

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

c) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$

d) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$

SOLUTION

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$\frac{1}{(t+1)(t+2)}$ donne :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+2} dt$$

Interdit

interdit ⚠, car les deux intégrales divergent.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(t+1) - \ln(t+2) \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{t+1}{t+2} \right) \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)}_{\rightarrow 0} - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \ln 2$$



Exercice similaire pour les séries numériques

Calculer la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$