Séries entières

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n$

c) $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

f) $\displaystyle\sum \sin(\mathrm{e}^{-n}) x^n$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Exercice 2:

Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.

c) Établir la continuité de f en -1.

d) Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 3:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 4:

Former le développement en série entière de

$$\frac{1 - z\cos t}{1 - 2z\cos t + z^2}$$

pour $|z| < 1$ et $t \in]0\,;\pi[$.

Exercice 5:

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$$

Exercice 6:

Établir que pour tout $x \in]-1\,;1[$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} x^n$$

Exercice 7:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 8:

Soient $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.

b) Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 9:

Soit f définie sur $]-1\,;1[$ par
$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$.

Exercice 10:

Soit
$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

a) Déterminer l'intervalle de convergence de f.

b) Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $]-1\,;1[$

Exercice 11:

Rayon de convergence et somme de

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$

Exercice 12:

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

Exercice 13:

Montrer

1) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

2) $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 14:

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 16:

1. Trouver la solution f de l'équation différentièlle : $y' - 2xy = 1$ vérifiant $f(0) = 0$.
2. Développer f en série entière à l'origine .
3. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

b) $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n$

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

f) $\sum \sin(e^{-n}) x^n$

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Solution

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

Notons $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$, pour tout $n \geq 0$.

On a $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$=$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R =$ $\square$

b) $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2} z^n$

Notons $a_n = e^{-n^2}$, pour tout $n \geq 0$.

On a $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$=$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R =$ $\square$

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

D'où $\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$ et $\sum_n \frac{x^n}{n}$ ont le même rayon de convergence.

Or

D'où le RCV de la SE $\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$ est $R =$. $\square$

---

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} |U_n|$.

On a $\lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} =$

D'où $\lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^2$

Ainsi, d'après D'Alembert, on a :

$$\begin{cases} \text{Si} \qquad\qquad , \text{ la série } \sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si} \qquad\qquad , \text{ la série } \sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

est $\boxed{R = \qquad}$

$\square$

---

e) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} |U_n|$.

D'où $\lim_{n} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^3 \cdot e$

Ainsi, d'après D'Alembert, on a :

$$\begin{cases} \text{Si} \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ la série } \sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si} \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ la série } \sum_{n\geq 1} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

est $\boxed{R = \quad}$ $\square$

f) $\sum \sin(\mathrm{e}^{-n})x^n$

On a $\sin(e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$ car $\begin{cases} \sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t \\ \text{et } e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

D'où $\sum_n \sin(e^{-n})x^n$ et $\sum_n e^{-n} x^n$ ont le même rayon de convergence

D'où $R =$ est le rayon de convergence de $\sum_n e^{-n} x^n$,

et donc celui de $\sum_n \sin(e^{-n})x^n$.

g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

Notons $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$, pour tout $n \geqslant 0$.

On a $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n$

$= \lim_n$

$= \lim_n$

$= \lim_n$

$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R =$ $\square$

h) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

Méthode 1

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = z^{n^2}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |U_n|$.

On a $\dfrac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \dfrac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}}$

$$= |z|^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \begin{cases} & \text{si } |z| < 1 \\ & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |U_n| \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la série } \sum_{n\geq 0} |U_n| \end{cases}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$ est $\boxed{R = \quad}$

$\square$

Méthode 2

C'est la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{n^2}$, où :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(a_n \cdot 1^n)_n = (a_n)_n$ bornée $\Rightarrow R$

Et $\sum_n a_n \cdot 1^n$ diverge car $\Rightarrow R$

Enfin : $\boxed{R = \quad}$

$\square$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n \geqslant 0} |U_n|$.

On a $$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{\pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}} |z|^{2(n+1)}}{\pi^{\sqrt{n^2+2n}} |z|^{2n}}$$

$$= |z|^2 . \pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)} - \sqrt{n^2+2n}}$$

D'autre part :

$\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)} - \sqrt{n^2+2n} =$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

$\Rightarrow \lim_{n} \left(\sqrt{(n+1)^2 + 2(n+1)} - \sqrt{n^2+2n} \right) =$

Par suite $\lim_{n} \dfrac{|U_{n+1}|}{|U_n|} =$

$\begin{cases} \text{Si} \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ la série } \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si} \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ la série } \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si} \\ \text{Si} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si} \\ \\ \text{Si} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la série entière

$\sum_{n\geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$ est $\boxed{R = \quad}$

□

---

j) $\sum_{n\geq 0} \sin(n) z^n$

Posons $a_n = \sin(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière cherché.

$(a_n \cdot 1^n)_n$ est une suite bornée $\Rightarrow R$

Et on a d'autre part que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \sin(n) \cdot 1^n$, qui est

$\sum_{n\geq 0} \sin(n)$, diverge, car

D'où R

La suite $(\sin(n))_n$ n'admet pas de limite.

à savoir

Enfin : $\boxed{R = \quad}$

□

---

k) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

Rappel

Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\square$

$\boxed{\text{Fin Exercice 1}}$

Exercice 9:

Soit f définie sur $]-1\,;1[$ par

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1\,;1[$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$.

c) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1\,;1[$.

Solution

a) Rappel : le produit de 2 fonct DSE est une fonct DSE.

b) Juste faites vos calculs.

c) $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est impaire, alors son développement en série entière est de la forme :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \quad ; \quad x\in\,]-1,1[$$

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n}$$

$$x^2 f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n x^{2n+2}$$

$$x f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

$(1-x^2)y'-xy=1.$

Ainsi :

$$\left(\forall x \in]-1,1[,\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall x \in]-1,1[,\ a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}(2(n+1)+1)a_{n+1}x^{2(n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall x \in]-1,1[,\ a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left((2n+3)a_{n+1} - (2n+1)a_n - a_n\right)x^{2n+2} = 1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)a_{n+1} = (2n+2)a_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 0,\ a_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3}a_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ a_n = \dfrac{2n}{2n+1}a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ a_n = \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

Brouillon

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2n}{2n+1}\cancel{a_{n-1}} \\ \vdots \\ \cancel{a_1} = \dfrac{2}{3}a_0 \end{cases}$$

$a_n =$?

Ainsi,

$$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \; ; \; x \in]-1,1[\right)$$

devient :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}}$$

qui est le DSE de f.

Fin Exercice 9

Exercice 11:

Rayon de convergence et somme de

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ 2) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$ 3) $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 5) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$ 6) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$

Solution

1) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$

$R=+\infty$, d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}x^n = ?$ « pensez à $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ »

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Rappel

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$

$R=+\infty$, encore d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

Soit $x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = ?$

On pense à $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$

Ruse à retenir

On écrit $(n+1)(n-2)$ sous la forme

$$(n+1)(n-2) = a + bn + c\, n(n-1)$$

« C'est possible car $(1, X, X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. »

On trouve

$(a = \quad , b = \quad ; c = \quad)$

$\Rightarrow (n+1)(n-2) =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}$

$=$

$=$

$=$

$=$

$$=$$

$$=$$

$$= (x^2 - 2)e^x$$

3) $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

i) $R = ?$

Appliquons D'Alembert pour les séries numériques.

Soit $x \neq 0$.

Notons $U_n = (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} =$

Alors $\begin{cases} \forall |x| < \quad , \sum |U_n| \\ \forall |x| > \quad , \sum |U_n| \end{cases}$

D'où $R = 1$

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = ?$

On peut à appliquer :

$\begin{cases} \forall |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \text{puisque c'est la dérivée de } x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{, de rayon de convergence } 1. \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$$

$=$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$=$

$=$

$$= \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$

4) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

i) $R=1$, tout comme dans 3°/, via D'Alembert pour les séries numériques.

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = ?$

On pense à :

$$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{argth}(x)$$

5) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$

i) $R=1$, tout comme dans 3°/, via D'Alembert pour les séries numériques.

ii) Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = ?$

On a : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right)$$

On pense à : $\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \quad =$

6) $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$

i) $R=?$

Posons $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n+1}}{a_n}=\lim_n\left(1+\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{a_n}\right)=1$$

Car $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, puisque $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ série

D'où $R=1$, d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

ii) Soit $x\in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=?$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times 1\right)x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\,b_{n-k}\right)x^n,\text{ où }\begin{cases}a_k=\frac{1}{k}\\ b_k=1\end{cases}$$

$=$

$=$

$=$

$=$

À retenir

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)x^n$$

$\boxed{\text{Fin Exercice 11}}$

Exercice 12:

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$.

f est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$, qui est de rayon de convergence infini.

D'où f est de classe

Exercice 13:

Montrer

1) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

2) $$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

1) $$\forall x \in]-1,1[, \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}, \ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$$

$$\forall x \in]-1,1[\setminus \{0\}, \ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} x^{n}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx$$

admettons l'interversion pour le moment.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\int_0^1 x^n\,dx \right)$$

$$=$$

$$=$$

Justifions l'interversion :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\int_0^1 x^n\,dx \right)$$

Notons $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

Pour pouvoir intervertir, il suffit qu'on montre que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$

2) $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Pour 1) : C'est évident.

Pour 2) :

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$?

$\forall x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

fin Exercice 13

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Solution

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$x y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$x^2 y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1}$$

$$x^2y''(x) + x(1+x)y'(x) - y(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1) a_n + n a_n + (n-1) a_{n-1} - a_n\big) x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ n(n-1) a_n + n a_n + (n-1) a_{n-1} - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ \big(n(n-1) + n - 1\big) a_n = (1-n) a_{n-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ (n^2-1)a_n = -(n-1)\,a_{n-1} \end{cases}$$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

Brouillon

$$\iff \forall x > 0,\ y(x) = 2a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$$

Ainsi, $y : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$ Convient.

Exprimons $y(x)$ en fonction des fonctions usuelles

Il est clair qu'on a besoin du développement en série entière suivant :

$\forall x \in \mathbb{R},\quad =$

$\boxed{y(x) = }$ $\square$

fin exercice 15