

Fonctions holomorphes

Résumé

Ω : ouvert de $\mathbb{C}$

$\tilde{\Omega} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+iy \in \Omega \}$, donc ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}; x+iy \mapsto f(x+iy)$ une application

$\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}; (x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$

$\operatorname{Re}(\tilde{f}(x,y)) = u(x,y)$ et $\operatorname{Im}(\tilde{f}(x,y)) = v(x,y): (\tilde{f} = u + iv)$

$\mathbb{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r \};$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in [0, +\infty]$

Convention : $\mathbb{D}(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$

Def 1: f est dite $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 si et si $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$.

Dans ce cas, $f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

Prop 2: $z_0 = x_0 + iy_0$.

f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f} \text{ différentiable en } (x_0, y_0) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right.$

À retenir $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = f'(z)$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i f'(z)$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{y}}(x_0, y_0) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

dites équations de Cauchy-Riemann.

Def 3: f est dite **holomorphe** sur Ω si et si:
 $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est } \mathbb{C}\text{-dérivable en tout point de } \Omega \\ z \mapsto f'(z) \text{ est continue sur } \Omega \end{array} \right.$

Prop 4: $(f \text{ holomorphe sur } \Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \tilde{\Omega} \\ \tilde{f} \text{ vérifie les équations de C-Riem} \end{cases}$

Corollaire 5:

$$f \text{ holomorphe sur } \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Prop 6: (Opérations)

Soient f et $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions **holomorphes** sur Ω , on a:

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est holomorphe sur Ω , et on a:

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

2) $f g$ est holomorphe sur Ω , et on a:

$$(f g)' = f' g + f \cdot g'$$

3) Si g ne s'annule pas sur Ω , alors: $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont holomorphes sur Ω , et on a:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

Prop 7 :

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et si f donne f , alors f est holomorphe sur $D(0, R)$ et l'on a :

$$\forall z \in D(0, R), f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Corollaire 8 :

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et si f donne f , alors f est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur $D(0, R)$, et qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k a_n z^{n-k} ; \left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k \right)$$

Prop 9 : (Composée)

$$\text{Si } \begin{cases} f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe sur } \Omega \\ g: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe sur } \Delta \\ f(\Omega) \subset \Delta \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Alors $\left(\begin{array}{l} g \circ f \text{ est holomorphe sur } \Omega \text{ et qu'on a :} \\ \forall z \in \Omega, (g \circ f)'(z) = f'(z) \times g'(f(z)) \end{array} \right)$

Déf 1 : Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

f est dite analytique sur Ω si et si f est développable en série entière autour de tout point de Ω .

Prop 2 : La somme d'une série entière est analytique sur son disque ouvert de convergence $D(0, R)$;

Prop 3: $\mathcal{O}(\Omega)$ sous-algèbre de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$

Prop 4:

1) Toute fonction analytique f sur Ω est holomorphe

2) f est aussi indéfiniment dérivable sur Ω , et pour tout $z_0 \in \Omega$, le développement en série

entière autour de z_0 est :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Prop 5: Toute fonction f holomorphe sur Ω est analytique sur Ω .

Précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$, si $D(z_0, R)$ est le plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans Ω , il existe une suite de complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ telle :

$$\forall z \in D(z_0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Prop 6 (Principe du prolongement analytique)

Ω ouvert connexe par arcs.

Ω_1 ouvert $\subset \Omega$.

f et h deux fonctions holomorphes sur Ω .

1°) Si $f = h$ sur Ω_1 alors $f = h$ partout sur Ω .

2°) Si f est nulle sur Ω_1 alors f est nulle partout sur Ω .

3°) (Si f est nulle sur un voisinage d'un point quelconque de Ω alors f est nulle partout sur Ω)

Corollaire 7 Ω ouvert connexe par arcs.

f holomorphe sur Ω .

Si il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0)$ alors $f = 0$ sur Ω

Prop 8 (Principe de zéros isolés)

Si $\left(\begin{array}{l} \Omega \text{ ouvert connexe par arcs} \\ f \text{ holomorphe sur } \Omega \\ f \text{ non nulle sur } \Omega \\ z_0 \in \Omega; f(z_0) = 0 \end{array} \right)$ Alors $\left(\begin{array}{l} \exists D(z_0, \rho) \subset \Omega \text{ telle que:} \\ \forall z \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}, f(z) \neq 0 \end{array} \right)$

Fin résumé

Fonctions holomorphes

Ω : ouvert de $\mathbb{C}$

$\tilde{\Omega} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+iy \in \Omega \}$, donc ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}; x+iy \mapsto f(x+iy)$ une application

$\tilde{f}: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}; (x,y) \mapsto \tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$

$\text{Re}(\tilde{f}(x,y)) = u(x,y)$ et $\text{Im}(\tilde{f}(x,y)) = v(x,y): (\tilde{f} = u + iv)$

$\mathbb{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < r \};$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in [0, +\infty]$

Convention : $\mathbb{D}(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$

I) Fonctions holomorphes

Def 1: f est dite $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 si et si $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$.

Dans ce cas, $f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

Prop 2: $z_0 = x_0 + iy_0$.

f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f} \text{ différentiable en } (x_0, y_0) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$

Démo: ($\Rightarrow$) $f(z) \underset{z_0}{=} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$
où $\varepsilon(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$

$\Rightarrow f(z_0 + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f(z_0) + f'(z_0) \cdot H + H \cdot \underbrace{\varepsilon_1(H)}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0} 0}$

$$\Rightarrow f(z_0 + h + i(y_0 + k)) = f(z_0 + iy_0) + f'(z_0)(h + ik) + \underbrace{(h + ik) \varepsilon(h + ik)}_{\xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x_0 + h, y_0 + k) = \tilde{f}(x_0, y_0) + \underbrace{f'(z_0)(h + ik)}_{= L(h, k)} + \underbrace{(h + ik) \varepsilon_2(h + ik)}_{= ? O(\|h, k\|_2) ?}$$

On a : $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ (clair)

$$\|h + ik\|_2 = |h + ki|$$

$$(h + ik) \varepsilon_2(h + ik) = \|h + ik\|_2 \cdot \underbrace{\left(\frac{h + ik}{|h + ik|} \cdot \varepsilon_2(h + ik) \right)}_{\xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0} = o(\|h + ik\|_2)$$

On finit, $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) , et on a :

$$\begin{cases} d\tilde{f}(x_0, y_0)(h, k) = h \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + k \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

$$d\tilde{f}(x_0, y_0)(h, k) = L(h, k) = f'(z_0)(h + ik)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0) \right) \text{ et } \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = i f'(z_0) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = i \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\left(\leftarrow \right) \tilde{f}(x_0 + h, y_0 + k) = \tilde{f}(x_0, y_0) + d\tilde{f}(x_0, y_0)(h, k) + \|h + ik\| \varepsilon(h + ik)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h + i(y_0 + k)) = f(x_0 + iy_0) + d\tilde{f}(x_0, y_0)(h, k) + \|h + ik\| \varepsilon(h + ik)$$

$$\Rightarrow f(z_0 + (h + ik)) - f(z_0) = h \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + k \cdot \underbrace{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)}_{= i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)} + \|h + ik\|_2 \varepsilon(h + ik)$$

$$\Rightarrow f(z_0 + (h+ik)) - f(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)(h+ik) + |h+ik| \cdot \varepsilon(h+ik)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z_0 + (h+ik)) - f(z_0)}{h+ik} \xrightarrow{(h+ik) \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$$

d'où f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0

N.B. : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$

dites équations de Cauchy-Riemann.

Démo.

Vient de $\begin{cases} \tilde{f} = u + iv \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$

Def 3 : f est dite **holomorphe** sur Ω si et si :

- f est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de Ω
- $z \mapsto f'(z)$ est continue sur Ω

Vocab : $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; $z \mapsto f'(z)$ est la dérivée de f .

Prop 4 : $(f \text{ holomorphe sur } \Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f} \text{ de } \mathcal{C} \text{ (avec } C^1 \text{ sur } \tilde{\Omega}) \\ \tilde{f} \text{ vérifie les équations de C-Riem} \end{cases}$

Démo.
($\Rightarrow$)

On a f holomorphe sur Ω .

$\Rightarrow \forall (x+iy) \in \Omega$, f est $\mathbb{C}$ -dérivable en $(x+iy)$

$\Rightarrow \forall (x, y) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{f}$ différentiable en (x, y)

d'où $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ existent sur $\tilde{\Omega}$, reste à vérifier

qu'elles sont continues sur $\tilde{\Omega}$. On avait trouvé :

$$\left(\forall (x,y) \in \tilde{\Omega}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = f'(x+iy) \text{ et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i f'(x+iy) \right)$$

or f' continue sur Ω et $(x,y) \mapsto x+iy$ continue sur $\tilde{\Omega}$

alors la composée $(x,y) \mapsto f'(x+iy) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $\tilde{\Omega}$.

De même pour $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$, elle est aussi continue sur $\tilde{\Omega}$.

$\Rightarrow \tilde{f}$ de classe C^1 sur $\tilde{\Omega}$

$\rightarrow \tilde{f}$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann voir de prop 2.

$(\Leftarrow)$ M. que $\begin{cases} a) f \text{ dérivable en tout point de } \Omega \\ b) f' \text{ continue sur } \Omega \end{cases}$

Pour a) : On a $\begin{cases} \tilde{f} \text{ est différentiable sur } \tilde{\Omega} \\ \forall (x,y) \in \tilde{\Omega}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) \end{cases}$

$(\text{Prop 2}) \Rightarrow \forall (x+iy) \in \Omega, f \text{ dérivable en } (x+iy)$

Pour b) : f' est continue sur Ω : en effet :

On a : $\left(\forall (x+iy) \in \Omega, f'(x+iy) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) \right)$

et on a : $\begin{cases} x+iy \mapsto (x,y) \text{ continue sur } \tilde{\Omega} \\ (x,y) \mapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) \text{ continue sur } \tilde{\Omega} \end{cases} \left(\text{car } \tilde{f} \text{ de classe } C^1 \right)$

d'où la composée, qui est f' , est continue sur Ω 

Corollaire 5:

$$f \text{ holomorphe sur } \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Notation: $H(\Omega)$: l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

Prop 6: (Opérations)

Soient f et $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur Ω , on a:

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est holomorphe sur Ω , et on a:

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

2) $f g$ est holomorphe sur Ω , et on a:

$$(f g)' = f' g + f \cdot g'$$

3) Si g ne s'annule pas sur Ω , alors: $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont holomorphes sur Ω , et on a:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} ; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

Démo: Pareil aux fonctions: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ du Sup

N.B: $H(\Omega)$ sous-algèbre de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$.

Prop 7: 1°) Toute fonction polynomiale $f: z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et on a:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$$

2°) Plus généralement, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et si f est la somme f , alors f est holomorphe sur $D(0, R)$ et l'on a:

$$\forall z \in D(0, R), f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Démo: 1°) $z \mapsto z^k$ dérivable (via l. d'ajout) et de dérivée $z \mapsto k z^{k-1}$

et on conclut par combinaison linéaire.

2°) a) Soit $z_0 \in \mathcal{D}(0, R)$. Soit $z \in \mathcal{D}(0, R) \setminus \{z_0\}$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1} \right)}_{= U_n(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(z)$$

Soit $|z_0| < \rho < R$ fixé :

$\forall z \in \mathcal{D}(0, \rho)$, on a :

$$|a_n U_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|z_0|^k}_{\leq \rho^k} \underbrace{|z|^{n-k-1}}_{\leq \rho^{n-k-1}} = n |a_n| \rho^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left\{ \forall z \in \mathcal{D}(0, \rho), |a_n U_n(z)| \leq n |a_n| \rho^{n-1} \right.$$

$$\left. \sum_{n \geq 1} n |a_n| \rho^{n-1} < +\infty \text{ car } \left(\rho < R \text{ et } \sum n a_n z^{n-1} \text{ de Rayon de convergence } R \right) \right\}$$

D'où $\sum_n a_n U_n(z)$ CN sur $\mathcal{D}(0, \rho)$.

or : $\forall n, z \mapsto a_n U_n(z)$ est continue sur $\mathcal{D}(0, \rho)$

Alors $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(z)$ est continue sur $\mathcal{D}(0, \rho)$, en

particulier en z_0 (car $z_0 \in \mathcal{D}(0, \rho)$).

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n U_n(z) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n U_n(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

D'où f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z , pour tout $z \in \mathcal{D}(0, R)$
et que : $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$

b°) f' continue sur $D(0, R)$; en effet:

f' est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ sur $D(0, R)$, son disque ouvert de convergence.

D'où f' est continue sur $D(0, R)$.

Corollaire 8:

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et de somme f , alors f est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur $D(0, R)$, et qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k a_n z^{n-k}$$

Prop 9: (Composée)

Si $\begin{cases} f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe sur } \Omega \\ g: \Delta \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe sur } \Delta \\ f(\Omega) \subset \Delta \end{cases}$

$g \circ f$ est holomorphe sur Ω et qu'on a:

Alors $\forall z \in \Omega, (g \circ f)'(z) = f'(z) \times g'(f(z))$

Démo:

$\rightarrow g \circ f$ dérivable en tout $z \in \Omega$ et on a:

$$(g \circ f)'(z) = f'(z) \times (g' \circ f)(z)$$

— Démo: pareille au cas réel —

$\rightarrow (g \circ f)'$ continue sur Ω , comme produit de deux fonctions continues: f' et $(g' \circ f)$

II) Fonctions analytiques

Déf 1: Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

f est dite analytique sur Ω si et si f est développable en série entière autour de tout point de Ω

Càd: $\forall z_0 \in \Omega$, $\exists$ existe $D(z_0, r) \subset \Omega$, il existe $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ tels que:

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Exemples:

1) Toute fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$:

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad (\text{Formule de Taylor})$$

2) La fonction exponentielle: $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto e^z \end{cases}$, est analytique sur $\mathbb{C}$;

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On a:

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{z_0} \cdot e^{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} \cdot (z - z_0)^n$$

Prop 2: La somme d'une série entière est analytique dans son disque ouvert de convergence $D(0, R)$;

Démo: (via un calcul direct, en utilisant la technique des suites doubles sommables de nombres complexes)

Notation: $\mathcal{O}(\Omega)$: l'ens des fonctions analytiques sur Ω

Prop 3: $\mathcal{O}(\Omega)$ sous-algèbre de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$

Démo entrelap: Supp. que f et g analytiques sur Ω .

→ $\alpha f + \beta g$ analytique sur Ω :

Soit $z_0 \in \Omega$.

$$\exists D(z_0, r_1) \subset \Omega, \exists (a_n)_n \subset \mathbb{C}, \forall z \in D(z_0, r_1), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\exists D(z_0, r_2) \subset \Omega, \exists (b_n)_n \subset \mathbb{C}, \forall z \in D(z_0, r_2), g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Posons $r = \min(r_1, r_2)$. On a $D(z_0, r) \subset \Omega$ et que:

$$\forall z \in D(z_0, r), (\alpha f + \beta g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) (z - z_0)^n$$

→ fg est analytique sur Ω :

Soit $z_0 \in \Omega$.

$$\exists D(z_0, r_1) \subset \Omega, \exists (a_n)_n \subset \mathbb{C}, \forall z \in D(z_0, r_1), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\exists D(z_0, r_2) \subset \Omega, \exists (b_n)_n \subset \mathbb{C}, \forall z \in D(z_0, r_2), g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Posons $r = \min(r_1, r_2)$. On a $D(z_0, r) \subset \Omega$ et que:

$$\forall z \in D(z_0, r), (fg)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \text{ où } C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Propriété

1) Toute fonction analytique f sur Ω est holomorphe

2) f est ainsi indéfiniment dérivable sur Ω , et pour tout $z_0 \in \Omega$, le développement en série entière autour de z_0 est :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Démonstration : Supposons que f est analytique sur Ω .

1°) Il faut que f soit holomorphe sur Ω .

Soit $z_0 \in \Omega$.

$\exists D(z_0, r) \subset \Omega$, $\exists (a_n)_n \subset \mathbb{C}$ t.q. :

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$\Rightarrow \forall h \in D(0, r)$, $f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$. (son rayon de conv. $\geq r$)

Posez $g(h) = f(z_0 + h)$; g est la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ sur $D(0, r)$. Donc g holomorphe sur $D(0, r)$

on a : $(\forall z \in D(z_0, r), f(z) = g(z - z_0))$

Alors f est holomorphe sur $D(z_0, r)$ (composée de 2 fct holomorphes)

2°) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$

et $f(z) = g(z - z_0) \Rightarrow f'(z_0) = g'(0)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Prop 5: Toute fonction f holomorphe sur Ω est analytique sur Ω .

Précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$, si $D(z_0, R)$ est le plus grand disque ouvert centré en z_0 et inclus dans Ω , il existe une suite de complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\forall z \in D(z_0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Démo: (Hors programme)

Prop 6 (Principe du prolongement analytique)

Ω ouvert connexe par arcs.

Ω_1 ouvert $\subset \Omega$.

f et h deux fonctions holomorphes sur Ω .

1°) Si $f = h$ sur Ω_1 alors $f = h$ partout sur Ω .

2°) Si f est nulle sur Ω_1 alors f est nulle partout sur Ω .

3°) (Si f est nulle sur un voisinage d'un point quelconque de Ω alors f est nulle partout sur Ω)

(admis)

Corollaire 7 Ω ouvert connexe par arcs.

f holomorphe sur Ω .

Si il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0)$ alors $f = 0$ sur Ω

Démo: $\forall z \in \mathcal{D}(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{=0} (z - z_0)^n = 0$ (car f analytique)

$$\Rightarrow f = 0 \text{ au v}(z_0)$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ sur } \Omega$$

Prop 8 (Principe de zéros isolés)

Si $\left(\begin{array}{l} \Omega \text{ ouvert connexe par arcs} \\ f \text{ holomorphe sur } \Omega \\ f \text{ non nulle sur } \Omega \\ z_0 \in \Omega: f(z_0) = 0 \end{array} \right)$

Alors $\left(\begin{array}{l} \exists \mathcal{D}(z_0, \rho) \subset \Omega \text{ tel que:} \\ \forall z \in \mathcal{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}, f(z) \neq 0 \end{array} \right)$

$\ll$ les zéros de f sont isolés $\gg$

Démo: $f \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (sinon: $\forall n, f^{(n)}(z_0) = 0$ $\xrightarrow{\text{Coroll 7}} f = 0$ sur Ω)

Soit p le plus petit des entiers n vérifiant $(f^{(n)}(z_0) \neq 0)$

f analytique sur $\Omega \Rightarrow \left(\exists h > 0, \forall z \in \mathcal{D}(z_0, h), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right)$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathcal{D}(z_0, h), f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathcal{D}(z_0, h), f(z) = (z - z_0)^p \cdot \underbrace{\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-p}}_{= g(z)}$$

→ g continue sur $\mathcal{D}(z_0, r)$ (somme d'une série entière)
et $g(z_0) \neq 0$ ($= \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$)
D'où $(\exists 0 < \rho < r, \forall z \in \mathcal{D}(z_0, \rho), g(z) \neq 0)$
On finit: $(\forall z \in \mathcal{D}(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}, f(z) \neq 0)$

Fin