Ex 1

1) i) $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$; En effet.

Soit $f \in E$.

$\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 |f(t)|\,dt}_{=\|f\|_1} \leq \underbrace{\int_0^1 \|f\|_\infty\,dt}_{=\|f\|_\infty}$$

ii) $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes ; En effet :

À retenir : On considère la suite $f_n : t \mapsto t^n$; $(n \in \mathbb{N})$

On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0 \text{ pour } \|\cdot\|_1 \\ \text{Mais} \\ f_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \end{cases}$; D'où $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes

2) i) $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$; En effet :

Soit $f \in E$; on a : $(\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq \|f\|_\infty)$

$\Rightarrow \forall t \in [0,1], |f(t)|^2 \leq \|f\|_\infty^2$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(t)|^2\,dt \leq \underbrace{\int_0^1 \|f\|_\infty^2\,dt}_{=\|f\|_\infty^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}}_{=\|f\|_2} \leq \|f\|_\infty$$

ii) $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes ; en effet :

Reconsidérons $f_n : t \mapsto t^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$\|f_n\|_1 = \cancel{\frac{1}{n+1}}$ et $\|f_n\|_2 = \dots = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; alors $\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ pour } \|\cdot\|_2 \\ f_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \end{cases}$

~~(Cette fois-ci)~~

Et on conclut que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3) i) $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$; En effet : Soit $f \in E$, on a :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \cdot 1\,dt \leq \underbrace{\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}}_{=\|f\|_2} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^1 1^2\,dt}}_{=1}$$ (inégalité de C-Schw)

3) ii) $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes ; en effet :

En core une fois, considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$; $f_n : t \mapsto t^n$.

$\|f\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Ici ça ne va pas marcher comme plus_haut ; on a $\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ par } \|\cdot\|_1 \\ \text{et aussi} \\ f_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ par } \|\cdot\|_2 \end{array} \right.$

→ Raisonnons par l'absurde et supposons que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Alors $(\exists \beta > 0, \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1)$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_2 \leq \beta \|f_n\|_1)$

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{\beta}{n+1}\right)$

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\beta} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}}_{\to 0}\right)$

Par passage à la limite, on obtient : $\boxed{\frac{1}{\beta} \leq 0}$ ce qui est absurde

(Fin Ex 1)

Ex 2 1) $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes (OK) (voir Cours)

2) Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$; M. que $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty . \|B\|_\infty$:

On a $\|AB\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |(AB)_{ij}| \right)$.

Pour conclure, il suffit de m. que :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^{n} |(AB)_{ij}| \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Soit alors $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} |(AB)_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| . |B_{kj}| \right) \quad \text{(inég\_triang)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ik}| . |B_{kj}| \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(|A_{ik}| . \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}| \right)}_{\leq \|B\|_\infty} \right) \quad (\text{par déf de } \|B\|_\infty)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left(|A_{ik}| \cdot \|B\|_\infty \right)$$

$$= \|B\|_\infty \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \right)}_{\leq \|A\|_\infty} \quad \text{(encore par déf de } \|A\|_\infty\text{)}$$

$$\leq \boxed{\|B\|_\infty \cdot \|A\|_\infty}$$

CQFD

3) Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$; M. que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$:

On a : $\|AB\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} (AB)_{ij}^2}$

$$= \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \right)^2}$$

D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} B_{kj}^2 \right)$$

D'où :

$$\|AB\|_2^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} B_{kj}^2 \right)$$

$$\underset{\text{voir clef ci-dessous}}{\overset{\triangle!}{=}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2 \right) \right)}_{= \|A\|_2^2} \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{kj}^2 \right) \right)}_{= \|B\|_2^2}$$

Clef à ne pas oublier : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j$

Ainsi : $\underbrace{\|AB\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2}$

CQFD

4) Soit $\lambda \in S_p(A)$. M. que $|\lambda| \leq \|A\|_\infty$:

On a $\lambda \in S_p(A) \iff (\exists X \neq 0,\ AX = \lambda X)$; (Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$)

$AX = \lambda X \Rightarrow \left(\forall 1 \leq i \leq n,\ \lambda x_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k\right)$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. (on a $|x_{i_0}| > 0$ car $X \neq 0$)

Donc $|\lambda x_{i_0}| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_{i_0 k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_{i_0 k}| \cdot \underbrace{|x_k|}_{\leq |x_{i_0}|} \leq |x_{i_0}| . \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |A_{i_0 k}|}_{\leq \|A\|_\infty}$

En simplifiant enfin car $|x_{i_0}| > 0$, on obtient :

$$|\lambda| \leq \|A\|_\infty$$

(Fin Ex 2)

Ex3) 1) i) α) N_1 norme sur E ; En bref :

(a) $N_1(\lambda f) = \|\lambda(f + f'')\|_\infty \overset{\text{car } \|\cdot\|_\infty \text{ norme}}{=\!=} |\lambda| \|f + f''\|_\infty = |\lambda| N_1(f)$

(b) $N_1(f+g) = \|(f + f'') + (g + g'')\|_\infty \leq \underbrace{\|f + f''\|_\infty}_{N_1(f)} + \underbrace{\|g + g''\|_\infty}_{N_1(g)}$

(c) Supp. que $N_1(f) = 0$. M. que $f = 0$

On a $\|f + f''\|_\infty = 0$, donc $f + f'' = 0$ (car $\|\cdot\|_\infty$ norme)

f est solution de l'équa diff « $y'' + y = 0$ ».

$\Rightarrow (\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,\pi],\ f(x) = A\cos(x) + B\sin(x))$

Et On a : $\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$; D'où $(\forall x \in [0,\pi], f(x) = 0)$

c.à.d $f = 0$

β) N_2 norme sur E, En effet :

(a) $N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f)$ (ok)

(b) $N_2(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|f'' + g''\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f''\|_\infty + \|g''\|_\infty$

$= N_2(g)$

$= N_2(f)$

(c) $N_2(f)=0 \Rightarrow \|f\|_\infty+\|f''\|_\infty=0$

$\Rightarrow \|f\|_\infty=0$ (Somme nulle de deux réels positifs)

$\Rightarrow f=0$ (car $\|\cdot\|_\infty$ norme)

ii) N_1 et N_2 sont équivalentes ; en effet :

(α) $N_1 \leq N_2$: (Clair)

(β) Cherchons $\omega>0$ tel que : ($N_2 \leq \omega N_1$)

Soit $f\in E$.

f est solution de : $\begin{cases} y''+y = f''+f \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

D'après l'indice, on a donc :

$$\left(\forall x\in[0,\pi],\ f(x)=\int_0^x \sin(x-t)\left(f''(t)+f(t)\right)dt\right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x\in[0,\pi],\ |f(x)|\leq \int_0^x \underbrace{|\sin(x-t)|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{|f''(t)+f(t)|}_{\leq\|f''+f\|_\infty}dt\right)$$

$$\Rightarrow \forall x\in[0,\pi],\ |f(x)|\leq\int_0^x\|f''+f\|_\infty dt\leq\int_0^\pi\underbrace{\|f''+f\|_\infty}_{N_1(f)}dt=\pi.N_1(f)$$

D'où $\underbrace{\sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)|}_{\|f\|_\infty} \leq \pi.N_1(f)$

$\Rightarrow \|f\|_\infty\leq\pi.N_1(f)$

$$\Rightarrow \|f''\|_\infty \underset{\text{inég. triang}}{\leq} \underbrace{\|f''+f\|_\infty}_{N_1(f)}+\underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq\pi.N_1(f)} \leq (\pi+1)N_1(f)$$

$$\text{D'où } N_2(f)=\underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq\pi.N_1(f)}+\underbrace{\|f''\|_\infty}_{\leq(\pi+1)N_1(f)}\leq(2\pi+1)N_1(f)$$

($\omega=2\pi+1$ convient)

$\%_c$: $N_1 \leq N_2 \leq (2\pi+1) N_1$

2) a) N_1 norme ; En effet

(i) $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$ (claire)

(ii) $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$: (claire)

(iii) Supp. que $N_1(f) = 0$. M.q. $f = 0$

On a $N_1(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$ (Somme nulle de nombres réels positifs)

$\Rightarrow (f(0) = 0$ et $f' = 0)$

$f' = 0 \Rightarrow$ (f constante sur $[0,\pi]$)

et $f(0) = 0 \Rightarrow (\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = 0)$ CQFD

(b) N_2 norme ; (claire) vu que $\|\cdot\|_\infty$ norme.

(c) N_1 et N_2 sont équivalentes ; en effet :

(i) $N_1 \leq N_2$; En effet : Soit $f \in E$, on a :

$$N_1(f) = \underbrace{|f(0)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_2(f)$$

(ii) Trouvons $w > 0$ tel que : ($N_2 \leq w N_1$)

($\|f\|_\infty \leq ??$)

On a : $\left(\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt\right)$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt$$

$$\leq |f(0)| + \int_0^1 \underbrace{|f'(t)|}_{\leq \|f'\|_\infty}\,dt$$

$$\leq |f(0)| + \underbrace{\int_0^1 \|f'\|_\infty\,dt}_{= \|f'\|_\infty}$$

D'où $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$

$$\Rightarrow N_2(f) \leq |f(0)| + 2\|f'\|_\infty \leq 2\underbrace{(|f(0)| + \|f'\|_\infty)}_{N_1(f)}$$

D'où $N_2(f) \leq 2 N_1(f)$ $\boxed{w = 2 \text{ convient}}$ Fin Ex 3

6/10

Ex4 1) (voir cours)

2) M. que $N(AX) \leq \|A\| \cdot N(X)$

Il suffit de montrer que : $\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ |(AX)_i| \leq \|A\| \cdot N(X)\right)$

Soit alors $1 \leq i \leq n$; on a :

$$|(AX)_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k\right| \quad \left(\text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \cdot \underbrace{|x_k|}_{\leq N(X) \text{ ; par définition de } N(X)}$$

$$\leq N(X) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|}_{\leq \|A\| \text{ ; par définition de } \|A\|}$$

$$\leq N(X) \cdot \|A\|$$ CQFD

3) En déduire que $\sup\limits_{N(X)=1} (N(AX)) = \|A\|$;

On a : $\left(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } N(X) = 1,\ N(AX) \leq \|A\|\right)$ selon 2°)

Pour montrer que $\sup\limits_{N(X)=1} (N(AX)) = \|A\|$, il suffit de trouver $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $N(X_0) = 1$ et que $N(AX_0) = \|A\|$.

On a $\|A\| = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$.

Soit $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|$.

On veut un $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \\ \underbrace{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i\right|}_{N(AX_0)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|}_{\|A\|} \end{cases}$

Si on arrive à trouver $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{cases} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \\ \left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| \end{cases}$

alors c'est fini

Pour avoir $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|$, on s'arrangera à ce que $a_{pj} x_j$ sera positif, comme ça, $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j\right|$ sera $\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j$.

Le problème se réduit à « $\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|$ ».

On veillera pour cela que pour tout $1 \leq j \leq n$, $a_{pj} x_j = |a_{pj}|$

Avec $\begin{cases} x_j = 1 \text{ si } a_{pj} > 0 \\ x_j = -1 \text{ si } a_{pj} \leq 0 \end{cases}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ convient

Fin Ex4

Ex5 1) i) $N_2(P) = \|P\|_\infty^{[-1,1]}$; c'est une norme d'après le cours

ii) N_1 norme sur $\mathbb{R}[X]$; en effet :

(a) $N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda| \cdot |P^{(k)}(0)| = |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0) = |\lambda| N_1(P)$

(b) $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$; juste l'inég triangulaire

(c) Supp que $N_1(P) = 0$, et M-q-e $P = 0$

On a $N_1(P) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = 0$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k)}(0) = 0)$ (Somme nulle de réels positifs)

$\overset{\triangle}{\Rightarrow} \boxed{P = 0}$

Car $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{\frac{P^{(k)}(0)}{k!}}_{=0} X^k}_{=0}$ (Formule de Taylor pour les polynômes) ⚠

---

2) $P_n = \frac{1}{n} X^n$

(i) $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k \geq n+1$ et si $k \leq n-1$:

si $k = n$; $P_n^{(n)}(X) = \frac{1}{n} \cdot n! = (n-1)! \Rightarrow P_n^{(n)}(0) = (n-1)!$

Ainsi : $N_1(P_n) = (n-1)! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

8/10

D'où la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ Diverge pour la norme N_1.

(ii) Pour la norme N_2 :

$\forall n\geq 1,\ N_2(P_n) = \sup\limits_{-1\leq t\leq 1} \left|\frac{t^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to +\infty]{} 0$

D'où $(P_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 pour la norme N_2

3) N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, car la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ converge pour l'une et diverge pour l'autre.

Fin Ex 5

Ex 6 1) Supp $(AB)^n \xrightarrow[n\to +\infty]{} 0$.

On a $(BA)^n = B.\underbrace{(AB)^{n-1}}_{\xrightarrow[n\to +\infty]{} 0}.A \xrightarrow[n\to +\infty]{} B.0.A = 0$

---

2) Supp. que $\begin{cases} AB = BA \\ A^n \xrightarrow[n\to\infty]{} P \\ B^n \xrightarrow[n\to +\infty]{} Q \end{cases}$; M-que $PQ = QP$

On a $\left(\lim\limits_n A^n = P \text{ et } \lim\limits_n B^n = Q\right)$ alors $\lim\limits_n (A^n B^n) = (PQ)$

D'autre part, $(\forall n,\ A^n B^n = B^n A^n)$ car $AB = BA$.

$\Rightarrow \underbrace{\lim\limits_n B^n A^n}_{= QP \text{ ; car } B^n \xrightarrow[n]{} Q \text{ et } A^n \xrightarrow[n]{} P} = \lim\limits_n A^n B^n = PQ$

D'où $PQ = QP$

3) On a $\left(A_n \xrightarrow[n\to +\infty]{} A \text{ et } A_n^{-1} \xrightarrow[n\to +\infty]{} B\right) \Rightarrow A_n.A_n^{-1} \xrightarrow[n\to +\infty]{} AB$

Et on a $\forall n,\ A_n.A_n^{-1} = I_p \xrightarrow[n\to +\infty]{} I_p$; D'où $\boxed{AB = I_p}$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = B$

4) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = B$; M.q. $B^2 = B$ (i.e la matrice d'un projecteur)

On a $\lim\limits_{n} A^n = B \Rightarrow \lim\limits_{n} (A^n)^2 = B^2$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n} A^{2n} = B^2}$

D'autre part, $\lim\limits_{n} A^n = B \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n} A^{2n} = B}$; car c'est une suite extraite de $(A^n)_n$

D'où $B^2 = B$

5) $A = P.D.P^{-1}$; où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ car A diagonalisable

D'autre part, $D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{diag}(0, \dots, 0) = 0$

car : $(\forall 1 \leq i \leq p, |\lambda_i| < 1)$ et donc $\lambda_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Or $(\forall n, A^n = P D^n P^{-1})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n} A^n = P.0.P^{-1} = 0$

6) On a ${}^tA = -A$ et $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$.

D'où ${}^t(A^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} {}^tB$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n A^n = {}^tB}$ ${}^t(A^n) = ({}^tA)^n = (-A)^n = (-1)^n A^n$

En considérant les deux suites extraites paires et impaires, on a :

$\underbrace{\lim\limits_{n} A^{2n}}_{= B \text{ ; suite extraite de } (A^n)_n \text{ et } A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B} = {}^tB$ et $\underbrace{\lim\limits_{n} -A^{2n+1}}_{= -B \text{ Même raison}} = {}^tB$

D'où $(B = {}^tB$ et $-B = {}^tB)$

$\Rightarrow B = -B$; càd $B = 0$ Fin Exo 6

Fin TD de Topologie 1