

## Développements Limités Comparaison de Fonctions

### Exercice 1 :

Déterminer les développements limités suivants :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $DL_2(0)$ de $\ln(e^x + \cos x)$                 | 9) $DL_3(0)$ de $\arctan(e^x)$                             |
| 2) $DL_3(0)$ de $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$              | 10) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$                     |
| 3) $DL_3(0)$ de $\ln(\cos(x) + \cos(2x))$           | 11) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan(x)}{\tan(x)}$              |
| 4) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ | 12) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln(x)}$                      |
| 5) $DL_2(0)$ de $(1+x^3)\sqrt{1-x}$                 | 13) $DL_3(1)$ de $\arctan(x)$                              |
| 6) $DL_2(0)$ de $\frac{x}{e^x-1}$                   | 14) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin(x)}{1-\cosh(x)}$            |
| 7) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ | 15) $DL_3(0)$ de $\frac{x \cosh(x) - \sin(x)}{\cosh(x)-1}$ |
| 8) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3 + \cosh(x)}$               | 16) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$       |

### Exercice 2 :

Déterminer les développements limités suivants :

- 1)  $DL_{10}(0)$  de  $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$
- 2)  $DL_{1000}(0)$  de  $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

### Exercice 3 :

- 1) Déterminer le  $DL_n(0)$  de  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ . Exprimer-le à l'aide de factorielles.
- 2) En déduire le  $DL_{2n}(0)$  de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , puis le  $DL_{2n+1}(0)$  de  $\arcsin(x)$ .

### Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$   | 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$                |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan(x) - x \cos(x) - \sin(x)}{x^3}$   | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x} - \sqrt[6]{1+4x}}{\sin(x)}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sinh(x)}{x(\cos(x) - \cosh(x))}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}$                  | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \arctan(x)}{x \tan(x)}$      | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}$            |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$              | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\ln(x)}$                             | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$                     |

### Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes :

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ | 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$      | 5) $\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}\right)$     | 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$                             |

**Exercice 6 :**

1) Calculer les limites des suites suivantes :

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$     b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$     c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3}\right)^n$

2) Déterminer un équivalent simple de  $(u_n)_n$  dans chacun des cas suivants :

a)  $u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$     b)  $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$     c)  $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

**Exercice 7 :**

Déterminer un équivalent simple de la fonction  $f$  au voisinage de 0 dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = x(2 + \cos(x)) - 3 \sin(x)$ ;    b)  $f(x) = \operatorname{argth}(2x) - 2 \arctan(x)$ ;    c)  $f(x) = x^x - (\sin x)^x$

**Exercice 8 :**

1) Déterminer le développement asymptotique en  $+\infty$  de :

a)  $(x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x))$  à la précision  $\frac{1}{x^2}$ .

b)  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$  à la précision  $\frac{1}{x^2}$ .

c)  $\arctan(x)$  à la précision  $\frac{1}{x^3}$ .

2) Déterminer le développement asymptotique de la suite  $(u_n)_n$  à la précision  $\frac{1}{n^2}$  dans chacun des cas suivants :

a)  $u_n = \ln(n+1)$

b)  $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

c)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

**Exercice 9 :**

Soit  $f : ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ .

1) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

Notons encore  $f$  ce prolongement. Montrer que  $f$  est dérivable en 0.

2) Quelle est la position relative de  $(C_f)$  par rapport à sa tangente en 0.

**Exercice 10 :**

Mêmes questions que dans l'exercice 9, pour chacune des fonctions suivantes :

1)  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) - 1}$ .

2)  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ .

**Exercice 11 :**

Via un développement asymptotique de  $f$  en  $+\infty$ , montrer que  $(C_f)$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  et préciser leurs positions relatives :

a)  $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ ;    b)  $f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x))$ ;    c)  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$