

GRUPPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

Résumé

I) Groupe symétrique

Proposition et définition 1 :

Soit $n \geq 1$.

- 1) On rappelle qu'une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers lui-même est dite **permutation** de $\{1, \dots, n\}$.
- 2) Le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ se note $(S_n, \circ)$ et s'appelle le **groupe symétrique** de type n .
- 3) $\text{card}(S_n) = n!$
- 4) $(S_n, \circ)$ n'est pas commutatif si $n \geq 3$.

Définition 2 :

Support d'une permutation σ :

$\text{supp}(\sigma) = \{1 \leq i \leq n \mid \sigma(i) \neq i\}$; l'ensemble des points non fixes.

Proposition 3 :

La composée de deux permutations de supports **disjoints** est **commutative**.

Définition 4 : (Cycle-transposition)

- 1) Soient $n \geq 2$ et $\sigma \in S_n$. Soit $2 \leq p \leq n$.

On dit que σ est un **p -cycle** (ou cycle de longueur p) si et seulement s'il existe p entiers $a_1, \dots, a_p \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\begin{cases} \sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{p-1}) = a_p, \sigma(a_p) = a_1 \\ \forall i \notin \{a_1, \dots, a_p\}, \sigma(i) = i \end{cases}$$

- 2) Dans ce cas, on note $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$
- 3) Un cycle de longueur **2** s'appelle **transposition**.
- 4) Un cycle de longueur **n** s'appelle **permutation circulaire**.

NB :

- 1) Le support d'un p -cycle $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ est $\text{supp}(\sigma) = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$
- 2) Supposons $i \neq j$. On a

$$\tau = (i \ j) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau(i) = j, \ \tau(j) = i \\ \forall k \notin \{i, j\}, \ \tau(k) = k \end{pmatrix}$$

- 3) Soit τ une transposition. On a

$$\tau^2 = id \text{ et } \tau^{-1} = \tau$$

- 4) Soit σ est un p -cycle. On a $\sigma^p = id$

Proposition 4 : (Décomposition d'une permutation en produit de cycles)
Toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints.

Proposition 5 : (Décomposition d'une permutation en produit de transpositions)

Toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions.

Proposition et définition 5 : (Signature)

Il existe une unique application $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ telle que :

- 1) $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ .
- 2) $\forall \sigma, \sigma' \in S_n, \ \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Vocabulaire :

$\varepsilon(\sigma)$ s'appelle la **signature** de σ .

Proposition 6 :

- 1) Soit c un p -cycle. On a $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.
- 2) $\varepsilon(id) = 1$

II) Déterminant selon une base

NB :

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ; où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Formes n-linéaires

Définition 1 : (Forme bilinéaire sur E)

Soit $f : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$.

f est dite **forme bilinéaire** sur E si et seulement si :

- 1) $\forall a \in E$, l'application $x \mapsto f(x, a)$ est une forme **linéaire**.
On dit que f est linéaire par rapport à la **première** variable.
- 2) $\forall a \in E$, l'application $x \mapsto f(a, x)$ est une forme **linéaire**.
On dit que f est linéaire par rapport à la **deuxième** variable.

Autrement dit :

- 1) $\forall a \in E, \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(\alpha x + y, a) = \alpha f(x, a) + f(y, a)$$

- 2) $\forall a \in E, \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(a, \alpha x + y) = \alpha f(a, x) + f(a, y)$$

NB :

On définit de même une application $f : E^3 \rightarrow \mathbb{K}$ **trilinéaire** sur E .
 f est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c-à-d :

- 1) **Linéarité par rapport à la première composante :**

$\forall a, b \in E, \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(\alpha x + y, a, b) = \alpha f(x, a, b) + f(y, a, b)$$

- 2) **Linéarité par rapport à la deuxième composante :**

$\forall a, b \in E, \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(a, \alpha x + y, b) = \alpha f(a, x, b) + f(a, y, b)$$

- 3) **Linéarité par rapport à la troisième composante :**

$\forall a, b \in E, \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(a, b, \alpha x + y) = \alpha f(a, b, x) + f(a, b, y)$$

En général :

Définition 2 : (Forme n-linéaire sur E)

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$, où $n \geq 2$.

On dit que f est une **forme n-linéaire** sur E si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$, f est linéaire par rapport à la i -ème composante.

Autrement dit :

$\forall 1 \leq i \leq n, \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in E$. L'application suivante est une forme linéaire sur E :

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Réflèches à avoir :

Soit f est une **forme n-linéaire** sur E . On a :

- 1) $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$
- 2) $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha u + \beta v, x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n) + \beta f(x_1, \dots, x_{i-1}, v, x_{i+1}, \dots, x_n)$
- 3) $f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k, x_{i+1}, \dots, x_n\right) = \sum_{k=1}^p \alpha_k f(x_1, \dots, x_{i-1}, u_k, x_{i+1}, \dots, x_n)$
- 4) $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n \cdot f(x_1, \dots, x_n)$

2) Formes n-linéaires alternées

Définitions 1 :

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E , où $n \geq 2$.

- 1) f est dite **symétrique** si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, la **permutation** de deux vecteurs dans $f(x_1, \dots, x_n)$ **ne change pas** sa valeur.
- 2) f est dite **anti-symétrique** si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, la **permutation** de deux vecteurs dans $f(x_1, \dots, x_n)$ **change son signe**.
- 3) f est dite **alternée** si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si deux de ces vecteurs sont **égaux** alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

Cas particulier d'une forme bilinéaire :

Soit $f : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire sur E .

- 1) f est **symétrique** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E, f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$
- 2) f est **anti-symétrique** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E, f(x_1, x_2) = -f(x_2, x_1)$

Proposition 2 :

L'ensemble des formes **n-linéaires alternées** sur E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Proposition 3 :

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est **symétrique**.
- 2) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour toute **transposition** τ . On a

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

- 3) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour toute **permutation** σ . On a

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition 4 :

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est **anti-symétrique**.
- 2) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour toute **transposition** τ . On a

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

- 3) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour toute **permutation** σ . On a

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$$

où ε désigne la signature.

Proposition 5 :

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n -linéaire sur E .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est anti-symétrique.
- 2) f est alternée.

Proposition 6 :

Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n -linéaire alternée.

- 1) Si dans $(x_1, \dots, x_n)$, un vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- 2) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- 3) La valeur de $f(x_1, \dots, x_n)$ est inchangée si on ajoute à un vecteur de $(x_1, \dots, x_n)$ une combinaison linéaire des autres vecteurs.

3) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Proposition et définition 1 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- 1) Il existe une unique forme n -linéaire alternée f vérifiant $f(B) = 1$.
Celle-ci se note $\mathbf{det}_B$, et s'appelle le déterminant d'une famille de vecteurs dans la base B .
- 2) L'espace vectoriel des formes n -linéaires alternées de E est la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{det}_B$.
Ainsi, toute forme n -linéaire alternée est proportionnelle à $\mathbf{det}_B$.

NB :

- 1) $\det_B(B) = 1$
- 2) Toutes les propriétés d'une forme n -linéaire alternée valent pour $\mathbf{det}_B$.
Par exemple, si $\mathcal{F}$ est une famille liée de E de cardinal n , alors $\mathbf{det}_B(\mathcal{F}) = 0$, etc.

Proposition 2 : (Formule de Leibniz)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et B une base de E .

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille à n vecteurs de E .

Notons pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, $mat_B(x_j) = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$.

On a la Formule de Leibniz suivante :

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)i}$$

Notation :

Avec les notations dans la proposition 2, on a la notation suivante

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)i} = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Cas particuliers :

1) Pour $n=1$:

$$\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

2) Pour $n=2$:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Proposition 3 : (Relation entre $\det_B$ et $\det_{B'}$)

Soient B et B' deux bases du n -espace vectoriel E .

Pour toute famille $\mathcal{F}$ de E de cardinal n , on a :

$$\det_B(\mathcal{F}) = \det_{B'}(\mathcal{F}) \times \det_B(B')$$

Corollaire 4 :

Soit B une base du n -espace vectoriel E .

Pour toute base B' de E , on a :

$$\det_B(B') \neq 0 \text{ et } (\det_B(B'))^{-1} = \det_{B'}(B)$$

Corollaire 5 : (Caractérisation d'une base)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et B une base de E .

Soit $\mathcal{F}$ une famille de E de cardinal n . on a :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \det_B(\mathcal{F}) \neq 0$$

NB :

$$\mathcal{F} \text{ est une famille liée de } E \Leftrightarrow \det_B(\mathcal{F}) = 0$$

4) Déterminant d'un endomorphisme

Proposition et définition 1 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) $\det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B de E .
- 2) Le déterminant de f est le scalaire $\det_B(f(B))$, où B est une base de E .
On le note $\det(f)$.

Proposition 2 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \cdot \det(f)$
- 2) $\det(I_E) = 1$.
- 3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda I_E) = \lambda^n$.

Proposition 3 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$$

Proposition 4 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a

- 1) f est inversible $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$
- 2) Dans ce cas, on a

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

5) Déterminant d'une matrice

Définition 1 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B_c la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de A .

Le **déterminant** de A est

$$\det(A) = \det_{B_c}(C_1, \dots, C_n)$$

Proposition 2 :

Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Ainsi $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ pour tout $1 \leq j \leq n$. On a alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

Proposition 3 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , B une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

- 1) $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{mat}_B(x_1, \dots, x_n))$
- 2) $\det(f) = \det(\text{mat}_B f(B)) = \det(\text{mat}_B(f))$

Proposition 4 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

- 1) $\det(I_n) = 1$
- 2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- 3) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- 4) $\forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = (\det(A))^p$
- 5) $\det({}^t A) = \det(A)$
- 6) Le déterminant d'une matrice est celui de ses **lignes** dans la base canonique de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$.
- 7) i) $(A \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (\det(A) \neq 0)$
ii) Le cas échéant, on a

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

6) Résolution d'un système de Cramer

Considérons le système de Cramer suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ étant la colonne des inconnues, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ le second membre et A sa matrice inversible.

Notons $\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. (Il es non nul)

Pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, Δ_{x_k} est le déterminant obtenu à partir de Δ en remplaçant la k -ème colonne par le second membre $\mathbf{b}$.

Proposition :

L'unique solution du système (Σ) est le $n - uplet$ $(x_1, \dots, x_n)$ défini par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta}$$

7) Effet des opérations élémentaires

Proposition 1 :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

- 1) En multipliant par λ une colonne (respectivement ligne) de A , son déterminant se multiplie par λ .
- 2) En permuttant deux colonnes (resp lignes) de A , son déterminant se multiplie par (-1) .
- 3) En ajoutant à une colonne (resp ligne) de A une combinaison linéaire des autres colonnes (resp lignes), son déterminant reste inchangé.

Notations :

OPEL : Opérations élémentaires sur les lignes ;

OPEC : Opérations élémentaires sur les colonnes.

Corollaire 2 : (Traduction via les OPEL et OPEC)

- 1) L'OPEL $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et l'OPEC $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient $\det(A)$ par λ
- 2) L'OPEL $L_i \leftrightarrow L_j$ et l'OPEC $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient $\det(A)$ par (-1) , où $i \neq j$.
- 3) L'OPEL $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et l'OPEC $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ n'affectent pas la valeur de $\det(A)$, où $i \neq j$.

8) Déterminant triangulaire et triangulaire par blocs

Proposition 1 : (Déterminant triangulaire et diagonal)

- 1) (Déterminant triangulaire supérieur)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

- 2) (Déterminant diagonal)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Proposition 2 : (Déterminant triangulaire supérieur par blocs)

- 1)

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(B)$$

- 2)

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^p \det(A_i)$$

Proposition 3 : (Déterminant triangulaire inférieur par blocs)

1)

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(B)$$

2)

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & A_p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^p \det(A_i)$$

9) Cofacteurs- Comatrice - Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Définitions 1 : (Mineurs-Cofacteurs-Comatrices)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

1) Le mineur d'indice (i,j) :

C'est le déterminant Δ_{ij} obtenu à partir de $\det(A)$ par suppression de la **i-ème** ligne et la **j-ème** colonne.

2) Le cofacteur d'indice (i,j) :

C'est le scalaire

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

3) La comatrice de A :

C'est la matrice $(C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ des cofacteurs de A.

On la note $Com(A)$ ou $\tilde{A}$.

Proposition 2 :

1) (Déterminant suivant la **j-ème** colonne)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $1 \leq \mathbf{j} \leq n$. On a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\mathbf{j}} a_{i\mathbf{j}} \Delta_{i\mathbf{j}}$$

2) (Déterminant suivant la **i-ème** ligne)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $1 \leq \mathbf{i} \leq n$. On a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{\mathbf{i}+j} a_{\mathbf{i}j} \Delta_{\mathbf{i}j}$$

10) Calcul de l'inverse d'une matrice

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) $A \times {}^t(\text{com}(A)) = {}^t(\text{com}(A)) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$
- 2) Si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A))$$

11) Déterminant de VanderMonde

Proposition :

Soit $n \geq 2$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On note :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

FIN