

CONCOURS COMMUN 2006
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

CORRECTION

PREMIER PROBLEME

Etude d'une fonction.

1.

$$D = \mathbb{C} \setminus \{2i\}.$$

2. a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} z^2 = 8 - 6i &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = 8 \text{ et } |z^2| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \text{ et } \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z^2)) = \operatorname{sgn}(-6) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 10 & \text{(II)} \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 & \text{(II) + (I)} \\ 2y^2 = 2 & \text{(II) - (I)} \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (3, -1) \text{ ou } (x, y) = (-3, 1) \Leftrightarrow z = 3 - i \text{ ou } z = -3 + i. \end{aligned}$$

Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$.

b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

$$f(z) = 1 + i \Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \Leftrightarrow z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut $(1 + i)^2 - 4(-2 + 2i) = 8 - 6i = (3 - i)^2$. Cette équation admet donc deux solutions complexes distinctes à savoir $z_1 = \frac{(1 + i) + (3 - i)}{2} = 2$ et $z_2 = \frac{(1 + i) - (3 - i)}{2} = -1 + i$.

Les antécédents de $1 + i$ par f sont 2 et $-1 + i$.

3. Soit $(h, z) \in \mathbb{C}^2$.

$$f(z) = h \Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = h \Leftrightarrow z^2 = h(z - 2i) \text{ et } z \neq 2i \Leftrightarrow z^2 = h(z - 2i) \Leftrightarrow z^2 - hz + 2ih = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $h^2 - 8ih$ ou encore $h(h - 8i)$.

- Si $h \notin \{0, 8i\}$, ce discriminant est non nul. Dans ce cas, h admet exactement deux antécédents distincts.
- Si $h = 0$ ou $h = 8i$, ce discriminant est nul. Dans ce cas, h admet exactement un antécédent.

4. Ainsi, tout complexe h admet au moins un antécédent par f dans D . Ceci signifie que f est surjective ou encore que

$$f(D) = \mathbb{C}.$$

5. $1 + i$ a deux antécédents distincts, à savoir 2 et $-1 + i$. f n'est donc pas injective.

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. On a

$$|z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} = (z - 2i) \overline{(z - 2i)} \frac{z^2}{z - 2i} = (\bar{z} + 2i)z^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} g(z) &= z^2(\bar{z} + 2i + z) = (x^2 - y^2 + 2ixy)(2x + 2i) = 2x(x^2 - y^2) - 4xy + i(4x^2y + 2(x^2 - y^2)) \\ &= (2x^3 - 2xy^2 - 4xy) + i(4x^2y + 2x^2 - 2y^2) \end{aligned}$$

$$\forall z \in D, \operatorname{Re}(g(z)) = 2x^3 - 2xy^2 - 4xy \text{ et } \operatorname{Im}(g(z)) = 4x^2y + 2x^2 - 2y^2.$$

Etude d'un polynôme.

9. En développant $(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$ et en identifiant avec les coefficients de P_a , on obtient :

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \text{ et } t_1 t_2 t_3 = -2.$$

10. $P_a(0) = 2 > 0$. De plus, $P_a(-\infty) = -\infty < 0$. Comme P_a est continu sur $] -\infty, 0]$, une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires montre que P_a a au moins une racine dans $] -\infty, 0]$. En particulier, $t_1 < 0$.

11. Mais alors $t_2 + t_3 = -t_1 > 0$ et $t_2 t_3 = -\frac{2}{t_1} > 0$. Par suite, $t_1 < 0 < t_2 \leq t_3$. Enfin, $-t_1 = t_2 + t_3 \geq 0 + t_3 = t_3$. Finalement,

$$t_1 < 0 < t_2 \leq t_3 \leq -t_1.$$

Ensuite, $2 = (-t_1)t_2 t_3 \geq t_2^3$ et donc $1 \leq t_2 \leq \sqrt[3]{2} = 1, \dots$. Donc, $t_2 = 1$. Il reste $2 = (-t_1)t_3 \geq t_3^2$ et donc $t_3 = 1$, et enfin $t_1 = -2$. Ainsi, si a existe, nécessairement

$$t_1 = -2, t_2 = t_3 = 1 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, P_a(t) = t^3 - t(a^2 + 2a) + 2 = (t + 2)(t - 1)^2 = t^3 - 3t + 2.$$

12. Puisque $t_2 = 1$ est racine double de P_a , on a $P_a(t_2) = P'_a(t_2) = 0$. Ceci fournit $3 - (a^2 + 2a) = 0$ ou encore $(a - 1)(a + 3) = 0$ ou enfin $a = 1$ (puisque a est un entier naturel).

13. Réciproquement,

$$P_1 = X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2) \text{ et } a = 1 \text{ convient.}$$

Etude de deux ensembles de matrices.

14. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M_{x,y} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det M_{x,y} \neq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) - 2y \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin C.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-x^2 + y^2 + 2y \neq 0$.

$$\begin{aligned} M_{x,y} M_{-x,y} &= \begin{pmatrix} x - y & y \\ 2 & x + y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x - y & y \\ 2 & -x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 + y^2 + 2y & 0 \\ 0 & -x^2 + y^2 + 2y \end{pmatrix} \\ &= (-x^2 + y^2 + 2y)I_2 \end{aligned}$$

Par suite, $M_{x,y} \times \frac{1}{-x^2 + y^2 + 2y} M_{-x,y} = I_2$. On en déduit que

$$\text{Si } -x^2 + y^2 + 2y \neq 0, (M(x,y))^{-1} = \frac{1}{-x^2 + y^2 + 2y} M_{-x,y} = \frac{1}{-x^2 + y^2 + 2y} \begin{pmatrix} -x-y & y \\ 2 & -x+y \end{pmatrix}.$$

15. Σ ne contient pas 0 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

16. $J = \left\{ \begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \{xI_2 + yB, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, où $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. J est le sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par I_2 et B et est en particulier un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

17. La famille (I_2, B) est une famille génératrice de J . D'autre part, la matrice B n'est pas une matrice scalaire et la famille (I_2, B) est donc libre. On en déduit qu'une base de J est (I_2, B) et que J est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.

18. $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Plus généralement, pour $((x,y), (x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$,

$$(xI_2 + yB) \times (x'I_2 + y'B) = (xx' + yy')I_2 + (xy' + yx')B \in J.$$

$\times$ est donc une loi interne dans J .

Etude d'une application de $M_2(\mathbb{R})$.

19. Soient $(X, Y) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_B(\lambda X + \mu Y) = B(\lambda X + \mu Y) = \lambda BX + \mu BY = \lambda \varphi_B(X) + \mu \varphi_B(Y).$$

φ_B est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

20. a) On note que $M_{2,1}$ est inversible car $\det(M_{2,1}) = 1 \neq 0$. Soit alors $Y \in M_2(\mathbb{R})$. Pour $X \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi_{M_{2,1}}(X) = Y \Leftrightarrow M_{2,1}X = Y \Leftrightarrow X = (M_{2,1})^{-1}Y.$$

Ainsi, pour tout élément Y de $M_2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul élément X de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_{M_{2,1}}(X) = Y$. Ceci montre que $\varphi_{M_{2,1}}$ est bijective (et en particulier surjective).

$$\text{b) } \varphi_{M_{2,1}}(E_{1,1}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{1,1} = E_{1,1} + 2E_{2,1}.$$

$$\varphi_{M_{2,1}}(E_{1,2}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{1,2} = E_{1,2} + 2E_{2,2}.$$

$$\varphi_{M_{2,1}}(E_{2,1}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{2,1} = E_{1,1} + 3E_{2,1}.$$

$$\varphi_{M_{2,1}}(E_{2,2}) = (E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2})E_{2,2} = E_{1,2} + 3E_{2,2}.$$

La matrice de φ_B dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Dans ce cas, B n'est pas inversible. Mais alors, pour tout élément X de $M_2(\mathbb{R})$, on a $\det(BX) = \det(B)\det(X) = 0$ et donc, $\varphi_B(X)$ n'est pas inversible. Par suite, une matrice inversible comme I_2 n'a pas d'antécédent par φ_B . On en déduit que φ_B n'est pas surjective (et donc pas bijective).

FIN

