CONCOURS NATIONAL MAROCAIN - Session 2016
Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

Problème : 2

Partie I

1. *Si Z suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $Z(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Z=1) = p$, $P(Z=0) = 1-p$. Donc par, le théorème de transfert,*
$$\forall t \in \mathbb{R},\ M_Z(t) = pe^t + 1 - p.$$

2. *Par, le théorème de transfert, $\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j e^{tx_j}$ et donc M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ M_X^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j x_j^k e^{tx_j}.$$
D'où $\forall k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

3. (a) *φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ car M_X est strictement positive sur $\mathbb{R}$ puisque :*
   — $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall j \in [\![1\ ,\ r]\!],\ e^{txj} > 0$
   — $\exists i \in [\![1\ ,\ r]\!],\ p_i > 0$ *puisque* $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$

   Soit $t \in \mathbb{R}^*$.
$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j e^{tx_j} = \sum_{j=1}^{r} p_j (1 + x_j t + \frac{x_j^2}{2}t^2 + o_{t\to 0}(t)) = 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 + o_{t\to 0}(t^2)$$
   Donc $\varphi_X(t) = E(X) + \frac{V(X)}{2}t + o_{t\to 0}(t)$. D'où $\lim_{t\to 0} \varphi_X(t) = E(X)$. Donc φ_X est prolongeable par continuité en 0

   (b) *D'après la question précédente φ_X admet un développement limité d'ordre 1 en 0, donc elle est dérivable en 0 et $\varphi_X'(0) = \frac{V(X)}{2}$.*

   (c) i. *Soit $u \le 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, il existe $c \in]u,0[$ tel que :*
$$e^u - 1 - u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{3!}u^3 e^c \le 0 \text{ car } u \le 0.$$
   D'où $\forall u \le 0,\ e^u \le 1 + u + \frac{1}{2}u^2$.

   ii. *Soit $t \ge 0$. On a, pour tout $j \in [\![1\ ,\ r]\!]$, $tx_j \le 0$, donc, d'après la question précédente,*
$$M_X(t) \le \sum_{j=1}^{r} p_j \left(1 + tx_j + \frac{1}{2}x_j^2 t^2\right) = 1 + E(X)t + \frac{t^2}{2}V(X)$$
   Et comme $\forall x > -1,\ ln(1+x) \le x$, alors
$$\varphi_X(t) \le E(X) + \frac{t}{2}V(X) \le E(X) + \frac{t}{2}E(X^2) \text{ car } V(X) = E(X^2) - E^2(X) \le E(X^2).$$

(d) i. *Considèrons l'endomorphisme* ϕ *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *définie par :* $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \phi(f) = f'$.
On a, pour tout $i \in [\![1\ ,\ r]\!]$, f_i *n'est pas nulle et* $\phi(f_i) = x_i f_i$, *donc* f_i *est un vecteur propre de* ϕ *associé à la valeur propre* x_i. *Et comme les* x_i *sont deux à deux distinctes, alors* $(f_1, \dots, f_r)$ *est libre.*

ii. *Dans cette question on n'a oublié de dire que* $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$.
$\Longrightarrow$ *C'est évident.*
$\Longleftarrow$ *On pose, pour tout* $j \in [\![1\ ,\ r]\!]$, $p_j = P(X = x_j)$ *et* $q_j = P(Y = x_j)$.
On a $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, *donc* $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ M_X(t) = M_Y(t)$, *c-à-d* $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}(p_k - q_k) f_k = 0$. *Et comme la famille* $(f_1, \dots, f_r)$ *est libre, alors* $j \in [\![1\ ,\ r]\!]$, $p_j = q_j$. *D'où ont la même loi.*

(e) *Puisque X et Y sont indépendantes, alors* $\forall t \in \mathbb{R}$, e^{tX} *et* e^{tY} *le sont aussi. Donc* $E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right)$. *D'où* $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$

(f) *Le résultat de la question précédente se généralise, par récurrence, à un nombre fini de variables aléatoires discrètes finies mutuallement indépendantes.*
Comme X suit la loi binomiale de paramètres s et p, alors on peut voir X comme somme de s variables aléatoires $X_1, \dots, X_s$ *qui ont même loi de Bernoulli de paramètre p.*
Donc, d'après la question précédente, $\varphi_X = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \varphi_{X_j} = s\varphi_{X_1}$. *Donc*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = (M_{X_1})^s = (pe^t + 1 - p)^s.$$

(g)

$$\begin{aligned}
X \text{ et } -X \text{ sont symétriques} &\iff X \text{ et } -X \text{ ont même loi}\\
&\iff \varphi_X = \varphi_{-X} \ (\text{d'après I.3.d.ii})\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln\left(E\left(e^{-tX}\right)\right) \text{ et } \varphi_X(0) = 0\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(-t) = -\frac{1}{t}\ln\left(E\left(e^{tX}\right)\right) \text{ et } \varphi_X(0) = 0\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = -\varphi_X(-t)\\
&\iff \varphi_X \text{ est impaire}
\end{aligned}$$

4. (a) *Soit* $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$.

$$M_{S_n^*}(t) = E\left(e^{tS_n^*}\right) = e^{-t\frac{E(S_n)}{\sigma(S_n)}} E\left(e^{t\frac{S_n}{\sigma(S_n)}}\right)$$

Or

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = nm$$

et puisque les X_k *sont mutuellement indépendantes, alors :*

$$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n\sigma^2.$$

Donc $M_{S_n^*}(t) = e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} E\left(e^{t\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$. *D'où*

$$\varphi_{S_n^*}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$$

Et puisque les X_k *sont mutuellement indépendantes , alors les* $\dfrac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}$ *le sont aussi et, d'après I.3.e, on a :*

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = n\varphi_{\frac{X}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X}{\sigma\sqrt{n}}}(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}} \ln\left(E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\varphi_{S_n^*}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

(b) *Quand* $n \to +\infty$, $\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Donc

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{t}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{t}{2}.$$

Partie II

1. (a) *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $b \in]a,c[$, *alors* $\exists \lambda \in]0,1[,\ b = \lambda a + (1-\lambda)c$ ($\lambda = \frac{c-b}{c-a}$).
Or $\exp$ *est convexe, donc* $e^{bx} \leq \lambda e^{ax} + (1-\lambda)e^{cx} \leq e^{ax} + e^{cx}$.

(b) *On pose* $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = x_n) = p_n$. *On a* $\forall t \in I_X,\ M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{tx_n}$.

— *Comme* $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, *alors* $0 \in I_X$.

— *Soit* $a, c \in I_X$ *tel que* $a < c$ *et* $b \in]a,c[$. *Alors* $M_X(a)$ *et* $M_X(c)$ *existent. Or, d'après la question précédente,* $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{bx_n} \leq\leq e^{ax_n} + e^{cx_n}$, *donc* $M_X(b)$ *existe et par suite* $b \in I_X$

Donc I_X *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant 0.*

2. *On a* $Y(\Omega) = \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ P(Y = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. *Soit* $t \in \mathbb{R}$,*on pose* $a_n(t) = e^{-\lambda}\frac{(e^t\lambda)^n}{n!} > 0$.
Comme $\frac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \frac{\lambda e^t}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$, *donc, d'après la règle de D'Alembert* $M_Y(t)$ *existe pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et*
$M_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(e^t\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(e^t-1)}$

3. (a) *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-\alpha,\alpha[$ *et on a*

$$\forall (k,n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times]-\alpha,\alpha[,\ u_n^{(k)} = P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$

et Donc

$$\forall (k,n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times]-\alpha,\alpha[,\ \left|u_n^{(k)}\right| \leq P(X = x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|}$$

car $\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times]-\alpha,\alpha[,\ |tx_n| \leq \alpha|x_n|$.

(b) *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *D'après la question précédente,*

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times]-\alpha,\alpha[,\ |u_n^{(k)}(t) \leq |x_n|^k e^{-\delta|x_n|}P(X = x_n)e^{\rho|x_n|} \text{ où } \delta = \rho - \alpha > 0$$

Or si $k \geq 1$, *la fonction* $t \mapsto t^k e^{-\delta t}$ *admet sur* $[0,+\infty[$ *un maximum absolu en* $\frac{\delta}{k} > 0$, *qu'on le note* $N_k > 0$.
Sinon, $u_n(t) \leq P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}$. *Donc* $M_k = \max(1, N_k)$ *convient.*

(c) *On a :*

— $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement sur* $]-a,a[$.

— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-a,a[$.

— *D'après la question précédente,* $\forall \alpha > 0$ *tel que* $[-\alpha,\alpha] \subset]-a,a[$ *et* $\rho \in]\alpha,a[$,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists M_k > 0,\ \forall (n,t) \in \mathbb{N}\times]-\alpha,\alpha[,\ \left|u_n^{(k)}\right| \leq M_k P(X = x_n)ke^{\rho|x_n|}$$

Or $\sum_{n\geq 0} P(X = x_n)ke^{\rho|x_n|}$ *est convergente car* $\rho \in I_X$. *Donc* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ *converge normalement sur* $[-\alpha,\alpha]$

Donc M_X *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-a,a[$ *et*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in]-a,a[,\ M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$

En particulier $M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)x_n^k$. *D'où* $E(X^k)$ *existe et* $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

4. *Puisque Y suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors M_Y est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Donc, d'après la question précédente, E(Y) et $E(Y^2)$ existent et $E(Y) = M'_Y(0) = \lambda$ et $E(Y^2) = M''_Y(0) = \lambda(1+\lambda)$ et donc*

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \lambda.$$

Partie III

1. *Comme dans la question I.3.e.*
2. (a) *Le résultat est trivialement vérifié pour $t = 0$. Donc il suffit de le démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $t > 0$.*
   - *Pour $k = 1$, puisque la fonction $t \mapsto e^{st}$ est convexe sur $[0, +\infty[$ donc $st \leq 1 + st \leq e^{st}$.*
   - *Soit $k \geq 1$. Supposons que la propriété est vraie pour k et montrons la pour $k+1$.*
   - *Considérons la fonction ϕ_{k+1} définie sur $[0, +\infty[$ par : $\phi_{k+1}(t) = (k+1)!e^{st} - (st)^{k+1}$. ϕ_{k+1} est classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \geq 0,\ \phi'_{k+1}(t) = (k+1)s(k!e^{st} - (st)^k \geq 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence.) Donc ϕ_{k+1} est croissante sur $[0, +\infty[$. D'où $\forall t \geq 0,\ \phi'_{k+1}(t) \geq \phi'_{k+1}(0) = (k+1)!$ c-à-d $(k+1)!e^{st} \geq (st)^{k+1}$.*

   Et la récurrence est établie.

   (b) *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction de densité de X. On a $\forall t \in \mathbb{R},\ |t|^k \leq \dfrac{k!}{s^k} e^{s|t|}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s|t|} f(t)dt < +\infty$ car $s \in I_X$. Donc $E(|X|^k)$ est fini.*

   (c) *On a pour tout $t \in]-s, s[$:*

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tu)^n}{n!} f(u) \right) du.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n \ :\ u \mapsto \dfrac{(tu)^n}{n!} f(u)$

- *$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après la question III.2.a)*
- *$\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g \ :\ u \mapsto e^{tu} f(u)$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $t \in]-s, s[\subset I_X$*
- *$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(u)|du = \frac{|t|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^n f(u)du = \frac{E(|tX|^n)}{n!}$*

  ($\forall t \in]-s, s[, E(|tX|)$ existe puisque : $[-s, s] \subset I_X$ avec $s > 0$, et $\exp(a|X|) < \exp(sX) + \exp(-sX)$ on en déduit que $E(\exp(a|X|))$ existe, et donc $E(\exp|tX|)$ existe pour tout $|t| \leq s$.)
- *$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{E(|tX|^n}{n!}$ converge vers $\exp(E(|tX|)$.*

Donc, d'près le théorème d'intégration terme à terme,

$$\forall t \in]-s, s[,\ M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^n f(u)du \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

   (d) *D'après la question précédente M_X est développable en série entière en 0 et donc $\forall k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.*

FIN