Correction

d'après Mines de Sup 2003

Partie I

1.a Aisément : $\forall A,B\in M_2(\mathbb{C}),\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\sigma(\lambda A+\mu B)=\lambda\sigma(A)+\mu\sigma(B)$ donc $\sigma\in\mathcal{L}(M_2(\mathbb{C}))$.
De plus, $\forall A\in M_2(\mathbb{C}),\sigma^2(A)=A$ donc $\sigma^2=\mathrm{Id}$. Ainsi σ est une symétrie.

1.b Supposons $\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L=0$ avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$

On a $\begin{pmatrix}\alpha+i\beta & \gamma+i\delta\\ -\gamma+i\delta & \alpha-i\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ donc aisément $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

(I,J,K,L) est libre et formée de $4=\dim_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$ éléments de $M_2(\mathbb{C})$, c'en est donc une base.
$\sigma(I)=I$, $\sigma(J)=-J$, $\sigma(K)=-K$ et $\sigma(L)=-L$ donc $\mathrm{Mat}_{(I,J,K,L)}(\sigma)=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

2.a $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$.

$\sigma(A)=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$, $\sigma(B)=\begin{pmatrix}d'&-b'\\-c'&a'\end{pmatrix}$, $\sigma(B)\sigma(A)=\begin{pmatrix}d'd+b'c & -(d'b+b'a)\\ -(c'd+a'c) & c'b+a'a\end{pmatrix}=\sigma(AB)$.

2.b $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\sigma(A)=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$, $A\sigma(A)=\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&-bc+ad\end{pmatrix}=(ad-bc)I=\det A.I$.

2.c $\det\sigma(A)=\det A$ donc A est inversible ssi $\sigma(A)$ l'est.

Si tel est le cas : $A\sigma(A)=\det A.I$ donne $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\sigma(A)$.

3. $\sigma(A)=\mathrm{tr}(A).I-A$.

Partie II

1.a Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$.

$\sigma(A)={}^t\overline{A}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{d}&-\overline{c}\\-\overline{b}&\overline{a}\end{pmatrix}\Leftrightarrow d=\overline{a}$ et $c=-\overline{b}$

Par suite $H=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-\overline{b}&\overline{a}\end{pmatrix}/a,b\in\mathbb{C}\right\}$.

Or pour $a,b\in\mathbb{C}$ et $\forall A,B\in H$:
$\begin{pmatrix}a&b\\-\overline{b}&\overline{a}\end{pmatrix}=\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L\Leftrightarrow\alpha=\mathrm{Re}(a),\beta=\mathrm{Im}(a),\gamma=\mathrm{Re}(b)$ et $\delta=\mathrm{Im}(b)$.
Donc $H=\{\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L/\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$.

1.b $H=\{\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L/\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(I,J,K,L)$.
H est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.
La famille (I,J,K,L) étant libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ (cf. I.1.b), elle l'est aussi dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ et donc constitue une base de H. Par suite $\dim_{\mathbb{R}} H=4$.

2.a $\forall A,B\in H$, $\sigma(AB)=\sigma(B)\sigma(A)={}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A}={}^t(\overline{AB})$ donc $AB\in H$.

2.b $J^2=K^2=L^2=-I$, $JK=L$, $KJ=-L$, $KL=J$, $LK=-J$, $LJ=K$ et $JL=-L$.

2.c $H\subset M_2(\mathbb{C})$, $I\in H$, $\forall A,B\in H$, $A-B\in H$ (car H sous-espace vectoriel) $AB\in H$ (ci-dessus) donc H est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.
Le produit n'est pas commutatif.

3.a. Soit $A \in H$. On a $\sigma(A) = {}^t\overline{A}$ donc $A = {}^t\overline{\sigma(A)}$ i.e. $\sigma(\sigma(A)) = {}^t\overline{\sigma(A)}$ et donc $\sigma(A) \in H$.

$A = {}^t\overline{A}$ donc $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}{}^t\overline{A} = \operatorname{tr}\overline{A} = \overline{\operatorname{tr} A}$ donc $\operatorname{tr} A \in \mathbb{R}$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in H$. $\det A = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbb{R}^+$.

3.b Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \neq 0$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ mais dans les deux cas $\det A > 0$ donc A est inversible.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\sigma(A)$. Or $\sigma(A) \in H$ donc $A^{-1} \in H$.

Partie III

1.a $A\sigma(B) + B\sigma(A) \in H$ donc sa trace est réelle.

1.b $(A \mid A) = \dfrac{1}{4}\operatorname{tr}(2A\sigma(A))$, or $A\sigma(A) = \det A.I$ donc $(A \mid A) = \det A$.

1.c La linéarité du produit matriciel, de σ et de l'application trace donne sans peine la bilinéarité de $(.|.)$

L'expression $A\sigma(B) + B\sigma(A)$ est symétrique en A et B sont $(.|.)$ est symétrique.

$\forall A \in H$, $(A \mid A) = \det A \in \mathbb{R}^+$.

Si $(A \mid A) = 0$ alors $A = 0$ comme on l'a déjà vu en II.3.b.

2. Comme $\operatorname{tr}(J) = \operatorname{tr}(K) = \operatorname{tr}(L) = 0$, c'est sans peine qu'on observe que la famille (I, J, K, L) est orthogonale.

De plus $\det I = \det J = \det K = \det L = 1$, donc la famille est orthonormale.

Enfin, on a déjà vu que (I, J, K, L) est une base de H, on peut donc parler de base orthonormée.

3.a Soit $A \in H$. On peut écrire $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ avec

$\alpha = (A \mid I), \beta = (A \mid J), \gamma = (A \mid K); \delta = (A \mid L) \in \mathbb{R}$.

On a alors $\operatorname{tr} A = 2\alpha$ et par suite $A \in F \Leftrightarrow (A \mid I) = 0$.

Donc F est l'hyperplan dont I est vecteur normal et donc D la droite normale.

De plus J, K, L appartiennent à F et forme une famille orthonormée de $3 = \dim F$ éléments, c'est donc une base orthonormée de F.

3.b Puisque (I) est une base orthonormée de D, $r(A) = (A \mid I)I = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(A).I$.

Puisque v est la projection complémentaire de r, $v = I - r$ et donc $v(A) = A - \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(A).I$.

3.c $\sigma(A) = \operatorname{tr}(A).I - A$ donc $\sigma = 2r - \mathrm{Id}$ et ainsi s est la symétrie orthogonale d'axe D.

4.a $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, $B = \alpha' I + \beta' J + \gamma' K + \delta' L$.

$r(A) = \alpha I$, $v(A) = \beta J + \gamma K + \delta L$, $r(B) = \alpha' I$ et $v(B) = \beta' J + \gamma' K + \delta' L$.

$r(AB) = AB = (\alpha\alpha' - (\beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'))I = r(A)r(B) - (v(A) \mid v(B))I$

et $v(AB) = \alpha(\beta' J + \gamma' K + \delta' L) + \alpha'(\beta J + \gamma K + \delta L) + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)J + (\delta\beta' - \delta'\beta)K + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)L$

où on reconnaît $v(AB) = r(A)v(B) + r(B)v(A) + v(A) \wedge v(B)$.