

CONCOURS COMMUN 2008
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

PREMIER PROBLÈME

CORRECTION

Partie A - Etude de φ_1

1. Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Posons $P = \alpha X + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_1(P) = \alpha(X-a)(X-b) - (X - \frac{a+b}{2})(\alpha X + \beta) = -(\alpha \frac{a+b}{2} + \beta)X + \alpha ab + \beta \frac{a+b}{2}.$$

Ceci montre que $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Par suite, φ_1 est une application de $\mathbb{R}_1[X]$ dans lui-même.

Soient alors $(P, Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= (X-a)(X-b)(\lambda P' + \mu Q') - (X - \frac{a+b}{2})(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda \left((X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P \right) + \mu \left((X-a)(X-b)Q' - (X - \frac{a+b}{2})Q \right) = \lambda \varphi_1(P) + \mu \varphi_1(Q),\end{aligned}$$

et on a montré que

φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. $\varphi_1(1) = \frac{a+b}{2} - X$ et $\varphi_1(X) = ab - \frac{a+b}{2}X$. Par suite,

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}.$$

3. $\det(M_1) = -\frac{(a+b)^2}{4} + ab = -\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = -\frac{(a-b)^2}{4}$. Par suite,

$$\varphi_1 \text{ bijective} \Leftrightarrow \det M_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b.$$

φ_1 est bijective si et seulement si $a \neq b$.

4. (a) $\mathcal{B}$ est une famille de deux éléments de $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2. Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda(X-a) + \mu(X-b) &= 0 \Rightarrow (\lambda + \mu)X - (a\lambda + b\mu) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ a\lambda + b\mu = 0 \end{cases} \quad (\text{car la famille } (1, X) \text{ est libre}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ (a-b)\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 = \mu \quad (\text{car } a \neq b).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre et finalement

$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b) $\varphi_1(X - a) = (X - a)(X - b) - (X - a)(X - \frac{a+b}{2}) = (-b + \frac{a+b}{2})(X - a) = \frac{a-b}{2}(X - a)$ et en échangeant les rôles de a et b , $\varphi_1(X - b) = \frac{b-a}{2}(X - b)$. Par suite,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b-a}{2} \end{pmatrix} = \text{diag}\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

(c) Immédiatement

$$P_{B_1, B} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on sait que P_{B, B_1} est l'inverse de $P_{B_1, B}$. Or l'inverse de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ et donc

$$P_{B, B_1} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}.$$

(d) Les formules de changement de bases fournissent

$$M_1 = P_{B_1, B} M P_{B, B_1}.$$

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $M^p = \left(\text{diag}\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)\right)^p = \text{diag}\left(\frac{(a-b)^p}{2^p}, \frac{(b-a)^p}{2^p}\right)$ puis

$$\begin{aligned} M_1^p &= P_{B_1, B} M^p P_{B, B_1} \\ &= \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(a-b)^p}{2^p} & 0 \\ 0 & \frac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a \frac{(a-b)^p}{2^p} & -b \frac{(b-a)^p}{2^p} \\ \frac{(a-b)^p}{2^p} & \frac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a \frac{(a-b)^p}{2^p} + b \frac{(b-a)^p}{2^p} & ab \left(-\frac{(a-b)^p}{2^p} + \frac{(b-a)^p}{2^p}\right) \\ \frac{(a-b)^p}{2^p} - \frac{(b-a)^p}{2^p} & b \frac{(a-b)^p}{2^p} - a \frac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} b - (-1)^p a & ab(1 - (-1)^p) \\ -1 + (-1)^p & -a + (-1)^p b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, M_1^p = \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p} \begin{pmatrix} b - (-1)^p a & ab(1 - (-1)^p) \\ -1 + (-1)^p & -a + (-1)^p b \end{pmatrix}.$$

5. (a) $\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3)$ et donc

$$\Gamma \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).$$

(b) D'après la question 4.(e), $M_1^2 = \frac{b-a}{4} \begin{pmatrix} b-a & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \frac{(b-a)^2}{4} I_2$ puis $M_1^3 = M_1^2 M_1 = \frac{(b-a)^2}{4} M_1$.

$$M_1^2 = \frac{(b-a)^2}{4} I_2 \text{ et } M_1^3 = \frac{(b-a)^2}{4} M_1.$$

(c) On en déduit que $\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3) = \text{Vect}(I_2, M_1)$. D'autre part, $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$ et en particulier, M_1 n'est pas une matrice scalaire ($m_{2,1} = -1 \neq 0$). On en déduit que la famille (I_2, M_1) est libre et donc est une base de Γ .

La famille (I_2, M_1) est une base de Γ .

6. Si $a = 4$ et $b = 2$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ puis d'après la question 5.(b), $M_1^2 = I_2$ ou encore $\varphi_1^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}$. On sait alors que φ_1 est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ parallèlement à $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

La question 4.(b) montre que $\varphi_1(X - 4) = X - 4$ et $\varphi_1(X - 2) = -(X - 2)$. Le polynôme $X - 4$ est donc un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ et le polynôme $X - 4$ est un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$. Ces deux sous-espaces sont ainsi de dimension au moins 1. Mais ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans un espace de dimension 2. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = \dim(\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = 1$ puis que $(X - 4)$ (resp. $(X - 2)$) est une base de la droite vectorielle $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ (resp. $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$).

φ_1 est la symétrie par rapport à la droite $\text{Vect}(X - 4)$ parallèlement à la droite $\text{Vect}(X - 2)$.

Partie B - Quelques généralités sur φ_n

7. Soit P in $\mathbb{R}_n[X]$. Alors le polynôme $(X - a)(X - b)P'$ est de degré au plus $n + 1$ de même que le polynôme $\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$. On en déduit que $\varphi_n(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n + 1$. De plus, si on note a_n le coefficient de X^n dans P , le coefficient de X^{n+1} dans $\varphi_n(P)$ vaut $a_n(n - n) = 0$. On en déduit que $\varphi_n(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc que φ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

La linéarité de φ_n s'établit alors comme à la question 1. et donc

φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. (a) Pour tout réel x , $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$. Comme $\alpha = \max(a, b)$, la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - (a+b)x + ab$ ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$. f est donc continue sur $]\alpha, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$.

f est continue sur $]\alpha, +\infty[$.

(b) Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \ln(x^2 - (a+b)x + ab)$.

(c) Soit y une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x) - \frac{n}{2} \frac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab} y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x) - \frac{n}{2} f(x) y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, e^{-nF(x)/2} y'(x) - \frac{n}{2} f(x) e^{-nF(x)/2} y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (e^{-nF(x)/2} y)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I, e^{-nF(x)/2} y(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I, y(x) = C e^{nF(x)/2} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I, y(x) = C(x^2 - (a+b)x + ab)^{n/2}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto C(x^2 - (a+b)x + ab)^{n/2}$, $C \in \mathbb{R}$.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_{2p}[X]$.

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(\varphi_{2p}) &\Leftrightarrow (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, (x-a)(x-b)P'(x) - n\left(x - \frac{a+b}{2}\right)P(x) = 0 \text{ (car } I \text{ est infini)} \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in I, P'(x) - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}P(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/ \forall x \in I, P(x) = C(x^2 - (a+b)x + ab)^p \text{ (d'après (c))} \\
 &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/ P = C(X^2 - (a+b)X + ab)^p \text{ (car } I \text{ est infini)}.
 \end{aligned}$$

Comme $(X^2 - (a+b)X + ab)^p$ est un polynôme de degré $2p = n$ et donc un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on a montré que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \text{Ker}(\varphi_{2p}) = \text{Vect}((X^2 - (a+b)X + ab)^p).$$

(e) Comme à la question précédente, P est dans $\text{Ker}(\varphi_{2p+1})$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $P(x) = C(x^2 - (a+b)x + ab)^{(2p+1)/2}$.

- Si $a = b$, ceci s'écrit $\forall x \in I, P(x) = C(x-a)^{2p+1}$ ou encore $P = C(X-a)^{2p+1}$. Dans ce cas, puisque $(X-a)^{2p+1}$ est bien un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, $\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \text{Vect}((X-a)^{2p+1})$.
- Si $a \neq b$, ceci s'écrit $\forall x \in I, P(x) = C\sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1}$. Maintenant, la fonction $x \mapsto \sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1}$ n'est pas la restriction à I d'une fonction polynôme (car par exemple $\sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1} \underset{\alpha+}{\sim} |b-a|^{(2p+1)/2}(x-\alpha)^{p+\frac{1}{2}}$ ce qui n'est vérifié par aucun polynôme). Dans ce cas, seul le polynôme nul est solution ou encore $\text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \{0\}$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } a \neq b \\ \text{Vect}((X-a)^{2p+1}) & \text{si } a = b \end{cases}.$$

FIN

