Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

Exercice 1 [01680] [correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par

$$(a + i.b).(x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Celui-ci est appelé complexifié de E.

Sous-espace vectoriel

Exercice 2 [01681] [correction]
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\right\}$ b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$
c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}$ d) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\right\}$

Exercice 3 [01682] [correction]
Soient $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$ et
$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 4 [01683] [correction]
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

a) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\right\}$ b) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\right\}$
c) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\right\}$ d) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\right\}$

Exercice 5 [01684] [correction]
Soit $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6 [01685] [correction]
Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$ b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$
c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$ d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$.

Exercice 7 [01686] [correction]
Montrer que les parties de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :
a) $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\right\}$
b) $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$

Exercice 8 [01687] [correction]
Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\omega.\mathbb{R} = \{\omega x \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
A quelle condition $\omega.\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 9 [01688] [correction]
Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que l'ensemble $F = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.

Exercice 10 [01689] [correction]
Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et

$$\Delta = \{f - g / f, g \in \mathcal{C}\}$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11 [01690] [correction]
Démontrer que le sous-ensemble constitué des suites réelles périodiques est un sous-espace vectoriel d'une structure que l'on précisera.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 12 [01691] [correction]
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer
$$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$$

Exercice 13 [01692] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 14 [01693] [correction]
Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :
a) $F \cap (G + H) \supset (F \cap G) + (F \cap H)$
b) $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 15 [01694] [correction]
Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que
$$F \subset G \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

Exercice 16 [01695] [correction]
Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$.
Montrer que
$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

Exercice 17 [03116] [correction]
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
Soit S un sous-espace vectoriel de E stable par u et tel que
$$E = S + \operatorname{Im} u$$
Montrer que $S = E$.

Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Exercice 18 [01696] [correction]
Comparer $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ et $\operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B)$.

Exercice 19 [01697] [correction]
Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer
$$\operatorname{Vect}(A \cup B) = \operatorname{Vect}(A) + \operatorname{Vect}(B)$$

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 20 [01698] [correction]
Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ et $G = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 21 [01699] [correction]
Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ et
$G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 22 [01700] [correction]
Soient $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ et
$u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que H et $\operatorname{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 23 [01701] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et
$G = \operatorname{Vect}(\sin, \cos)$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 24 [01702] [correction]
Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) + f(1) = 0\}$.
a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Applications linéaires

Exercice 25 [01703] [correction]
Les applications entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires :
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$
d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$?

Exercice 26 [01704] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 27 [01705] [correction]
Soit $J : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que J est une forme linéaire.

Exercice 28 [01706] [correction]
Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 29 [01707] [correction]
Soient a un élément d'un ensemble X non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
a) Montrer que $E_a : \mathcal{F}(X, E) \to E$ définie par $E_a(f) = f(a)$ est une application linéaire.
b) Déterminer l'image et le noyau de l'application E_a.

Exercice 30 [01708] [correction]
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soient $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :
$\varphi(f) = f'$ et $\psi(f)$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
b) Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
c) Déterminer images et noyaux de φ et ψ.

Exercice 31 [01709] [correction]
Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect} f(A)$.

Exercice 32 [01710] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 33 [01711] [correction]
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \ker f \subset B + \ker f$$

Image et noyau d'un endomorphisme

Exercice 34 [01712] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 35 [01713] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.
b) Comparer $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im}(f + g)$.
c) Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.
d) Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$.

Exercice 36 [01714] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer
a) $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
b) $E = \operatorname{Im} f + \ker f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Exercice 37 [01715] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0$$

a) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
b) Etablir que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 38 [01716] [correction]
Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f \circ g = h,\ g \circ h = f \text{ et } h \circ f = g$$

a) Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.
b) Montrer $f^5 = f$.
c) En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

Exercice 39 [01754] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$; montrer que $\ker f = \ker(g \circ f)$, $\mathrm{Im} g = \mathrm{Im}(g \circ f)$ puis que $\ker f$ et $\mathrm{Im} g$ sont supplémentaires.

Exercice 40 [03360] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.
a) Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.
b) Montrer

$$E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$$

c) Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 41 [01717] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f$$

a) Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.
b) Justifier que $f(\mathrm{Im} g) = \mathrm{Im} f$.

Transformations vectorielles

Exercice 42 [01718] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{Id} - p$ l'est.
b) Exprimer alors $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et $\ker(\mathrm{Id} - p)$ en fonction de $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$.

Exercice 43 [01719] [correction]
Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :
(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;
(ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 44 [01720] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E. En déterminer noyau et image.

Exercice 45 [01722] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
a) Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par g i.e. $g(\ker f) \subset \ker f$ et $g(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} f$
b) En déduire que, si p est un projecteur de E, on a :
p et f commutent si, et seulement si, $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ stables par f.

Exercice 46 [01723] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit s un endomorphisme de E involutif, i.e. tel que $s^2 = \mathrm{Id}$.
On pose $F = \ker(s - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id})$.
a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
b) Montrer que s est la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G.
Plus généralement, Soient $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - (\alpha + 1)f + \alpha\mathrm{Id} = 0$.
On pose $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(f - \alpha\mathrm{Id})$.
c) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
d) Montrer que f est l'affinité par rapport à F, parallèlement à G et de rapport α.

Exercice 47 [01724] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3I = \tilde{0}$.
Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id}) = E$.
Quelle transformation vectorielle réalise f ?

Exercice 48 [01725] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On pose $q = \mathrm{Id} - p$ et on considère
$L = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\}$ et $M = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E), g = v \circ q\}$.
Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Notions affines

Exercice 49 [01726] [correction]
A quelle condition une translation et un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commutent-ils ?

Exercice 50 [01727] [correction]
A quelle condition simple le sous-espace affine $V = \vec{a} + F$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 51 [01728] [correction]
Soient $V = \vec{a} + F$ et $W = \vec{b} + G$ deux sous-espaces affines d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer que

$$V \cap W \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} \in F + G$$

Exercice 52 [01729] [correction]
Soient V et W deux sous-espaces affines disjoints d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe deux sous-espaces affines V' et W', disjoints, de même direction et contenant respectivement V et W.

Exercice 53 [01730] [correction]
Soient C_1 et C_2 deux parties convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer que l'ensemble C formé des milieux des vecteurs u_1 et u_2 avec $u_1 \in C_1$ et $u_2 \in C_2$ est convexe.

Exercice 54 [01731] [correction]
Soit V une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer que si tout barycentre d'éléments de V est encore dans V alors V est un sous-espace affine.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Il est aisé de constater que l'addition sur $E \times E$ est commutative, associative, possède un neutre $(0_E, 0_E)$ et que tout élément est symétrisable dans $(E \times E, +)$, le symétrique de (x, y) étant $(-x, -y)$.
Ainsi $(E \times E, +)$ est un groupe abélien.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $u, v \in E \times E$. On peut écrire $\lambda = a + ib$, $\mu = a' + i.b'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ avec $x, y, x', y' \in E$. On a

$$\lambda.(u+v) = (a+ib).(x+x', y+y') = (ax+ax'-by-by', ay+ay'+bx+bx') = \lambda.u+\lambda.v$$

$$(\lambda+\mu).u = ((a+a')+i(b+b')).(x, y) = (ax+a'x-by-b'y, ay+a'y+bx+b'x) = \lambda.u+\mu.u$$

$$\lambda.(\mu.u) = (a+ib)(a'x-b'y, a'y+b'x) = ((aa'-bb')x-(ab'+a'b)y, (aa'-bb')y+(ab'+a'b)x) = (\lambda\mu).u$$

et

$$1.u = u$$

On peut donc conclure que $(E \times E, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 2 : [énoncé]
a) non
b) non
c) oui
d) non.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $F \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{o} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 - 0 = 0$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in F$, on peut écrire $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ avec $x + y - z = 0$ et $x' + y' - z' = 0$.
On a alors $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ avec
$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - z) + \mu(x' + y' - z') = 0$ donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$.
$G \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{o} = (0, 0, 0) \in G$ car $(0, 0, 0) = (a - b, a + b, a - 3b)$ pour $a = b = 0$.
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in G$, on peut écrire $\vec{u} = (a - b, a + b, a - 3b)$ et $\vec{v} = (a' - b', a' + b', a' - 3b')$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. On a alors
$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \ldots = (a'' - b'', a'' + b'', a'' - 3b'')$ avec $a'' = \lambda a + \mu a'$ et $b'' = \lambda b + \mu b'$ donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in G$. Finalement F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
b) $\vec{u} = (x, y, z) \in F \cap G$ si, et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \\ a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4b \\ y = -2b \\ z = -6b \\ a = -3b \end{cases}$$

Ainsi $F \cap G = \{(-4b, -2b, -6b)/b \in \mathbb{R}\} = \{(2c, c, 3c)/c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) oui
b) non
c) oui
d) oui.

Exercice 5 : [énoncé]
$F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 = (0)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = n.0 + 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in F$. On a

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(nu_{n+1} + u_n) + \mu(nv_{n+1} + v_n) = n(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + \lambda u_n + \mu v_n$$

donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in F$.
Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : [énoncé]
a) non
b) oui
c) non
d) oui.

Exercice 7 : [énoncé]
a) $F \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(b) = \lambda f'(b) + \mu g'(b) = (\lambda f + \mu g)'(b)$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.
b) $G \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in G$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$.

Exercice 8 : [énoncé]
$\omega\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $0 \in \omega\mathbb{R}$ car $0 = \omega \times 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in \omega.\mathbb{R}$ on peut écrire $z = \omega x$ et $z' = \omega x'$ avec $x, x' \in \mathbb{R}$ et on a $(\lambda z + \mu z') = \omega(\lambda.x + \mu x')$ avec $\lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}$ donc $\lambda z + \mu z' \in \omega\mathbb{R}$.
Ainsi $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Si $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ alors puisque
$\omega = \omega \times 1 \in \omega\mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$, on a $i.\omega \in \omega\mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $\omega = 0$.
Inversement, si $\omega = 0$ alors $\omega\mathbb{R} = \{0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 9 : [énoncé]
$F \subset E$ et $0_E \in F$ car
$$0_E = 0.u_1 + \cdots + 0.u_n$$
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$. On peut écrire
$$x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u \text{ et } y = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$$
avec $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$. On a alors
$$\alpha x + \beta y = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)u_1 + \cdots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n)u_n$$
avec $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i \in \mathbb{K}$ donc $\alpha x + \beta y \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E.
De plus
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, u_i = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$
avec
$$\lambda_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Ainsi $u_i \in F$.

Exercice 10 : [énoncé]
$\Delta \subset E$. $0 = 0 - 0$ avec $0 \in \mathcal{C}$ donc $0 \in \Delta$.
Soient $h, h' \in \Delta$. On peut écrire $h = f - g$ et $h' = f' - g'$ avec $f, g, f', g' \in \mathcal{C}$. On a alors $h + h' = (f + f') - (g + g')$ avec $(f + f'), (g + g') \in \mathcal{C}$.
Soit $h \in \Delta$. On peut écrire $h = f - g$ avec $f, g \in \mathcal{C}$.
$\forall \lambda \geqslant 0$, on a $\lambda h = \lambda f - \lambda g$ avec $\lambda f, \lambda g \in \mathcal{C}$.
$\forall \lambda < 0$, on a $\lambda h = (-\lambda)g - (-\lambda f)$ avec $(-\lambda)g, (-\lambda)f \in \mathcal{C}$.
Dans les deux cas $\lambda h \in \Delta$.

Exercice 11 : [énoncé]
Montrons que l'ensemble F étudié est un sous-espace vectoriel de l'ensemble E des suites réelles.
Assurément $F \subset E$. La suite nulle est périodique donc $0 \in F$. Pour $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on peut affirmer que $\lambda u + \mu v$ est TT' périodique en notant T et T' des périodes non nulles de u et v. Ainsi $\lambda u + \mu v \in F$.

Exercice 12 : [énoncé]
$(\Leftarrow)$ ok
$(\Rightarrow)$ Supposons $F \cap G = F + G$. $F \subset F + G = F \cap G \subset G$ et de même $G \subset F$ et $F = G$.

Exercice 13 : [énoncé]
Par contraposée, si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ alors il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$ et il existe $y \in G$ tel que $y \notin F$.
$x + y \notin F$ car
$$x + y \in F \Rightarrow y = (x + y) - x \in F$$
ce qui est exclu.
$x + y \notin G$ car
$$x + y \in G \Rightarrow x = (x + y) - y \in G$$
ce qui est exclu.
Ainsi, on a $x, y \in F \cup G$ et $x + y \notin F \cup G$.
Puisque $F \cup G$ n'est pas stable pour l'addition, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Soit $\vec{u} \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F \cap G$ et $\vec{y} \in F \cap H$.
On a donc $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \in F$ car $\vec{x}, \vec{y} \in F$ et $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \in G + H$ car $\vec{x} \in G$ et $\vec{y} \in H$.
Ainsi $\vec{u} \in F \cap (G + H)$.
b) Soit $\vec{u} \in F + (G \cap H)$, on peut écrire $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G \cap H$.
On a donc $\vec{u} \in F + G$ car $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$ et aussi $\vec{u} \in F + H$ car $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in H$.
Ainsi $\vec{u} \in (F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 15 : [énoncé]
$F + (G \cap H) \subset F + G$ et $F + (G \cap H) \subset F + H$ donc
$F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Supposons de plus $F \subset G$.
Soit $\vec{x} \in (F+G) \cap (F+H)$. On a $\vec{x} \in F+G = G$ et $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in H$.
$\vec{v} = \vec{x} - \vec{u} \in G$ donc $\vec{v} \in G \cap H$ puis $x \in F + (G \cap H)$.

Exercice 16 : [énoncé]
$\supset$: ok
Soit $\vec{x} \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$.
On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G \cap F'$ et $\vec{x} = \vec{u}' + \vec{v}'$ avec $\vec{u}' \in F$ et $\vec{v}' \in G \cap G'$.
$\vec{u} - \vec{u}' = \vec{v}' - \vec{v} \in F \cap G = F' \cap G'$. $\vec{v} = -(\vec{v}' - \vec{v}) + \vec{v}' \in G'$ donc
$\vec{v} \in G \cap F' \cap G' = F \cap G \subset F$ puis $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \in F$. Ainsi
$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) \subset F$ puis l'égalité

Exercice 17 : [énoncé]
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$

$$E = S + \mathrm{Im} u^k$$

La propriété est vraie par hypothèse pour $k = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang $k \geqslant 1$.
On a évidemment

$$S + \mathrm{Im} u^{k+1} \subset E$$

Inversement, soit $x \in E$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$x = a + u^k(b) \text{ avec } a \in S \text{ et } b \in E$$

Or, on peut aussi écrire

$$b = a' + u(c) \text{ avec } a' \in S \text{ et } c \in E$$

On en déduit

$$x = a + u^k(a') + u^{k+1}(c) \in S + \mathrm{Im} u^{k+1}$$

car $a + u^k(a') \in S$ puisque S est un sous-espace vectoriel stable par u.
Ainsi $E \subset S + \mathrm{Im} u^{k+1}$ puis l'égalité.
Récurrence établie.
En appliquant cette propriété à l'indice de nilpotence de u, on obtient

$$E = S$$

Exercice 18 : [énoncé]
$A \cap B \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc

$$\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$$

L'inclusion réciproque n'est pas vraie : prendre $A = \{u\}$ et $B = \{2u\}$ avec $u \neq 0_E$

Exercice 19 : [énoncé]
$\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.
$\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ contient $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Vect}(B)$ donc contient A et B.
Ainsi $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $A \cup B$ donc $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ contient $\mathrm{Vect}(A \cup B)$.
Inversement, $A \subset A \cup B$ donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$. De même
$\mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$.
Par suite $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$.
Par double inclusion, l'égalité.

Exercice 20 : [énoncé]
$F \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tilde{o} \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$$

et

$$(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.
$G \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tilde{o} \in G$ (en prenant $a = b = 0$).
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b \text{ et } g(x) = cx + d$$

et on a alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) = ex + f$$

avec

$$e = \lambda a + \mu c \in \mathbb{R} \text{ et } f = \lambda b + \mu d \in \mathbb{R}$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$.
Soit $h \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = ax + b$$

car $h \in G$. Or $h \in F$ donc $h(0) = b = 0$ et $h'(0) = a = 0$ puis $h(x) = 0$ i.e. $h = \tilde{o}$.
Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{0}\}$$

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $a = h'(0) \in \mathbb{R}$, $b = h(0)$, $g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$.
Clairement $g \in G$ et $h = f + g$.
De plus $f(0) = h(0) - b = 0$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$ donc $f \in F$.
Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Finalement, F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 21 : [énoncé]
$F \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$ et $\tilde{0} \in F$ car $\int_{-1}^{1} 0 \,\mathrm{d}t = 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f, g \in F$, on a

$$\int_{-1}^{1} (\lambda f + \mu g)(t) \,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} f(t) \,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} g(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.
$G \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in G$ car c'est une fonction constante.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f, g \in G$. On a $\lambda f + \mu g \in G$ car il est clair que c'est une fonction constante.
Soit $h \in F \cap G$. On a h constante car $h \in G$. Posons C la valeur de cette constante.
Puisque $h \in F$, on a

$$\int_{-1}^{1} h(t) \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} C \,\mathrm{d}t = 2C = 0$$

et donc $h = \tilde{0}$. Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{0}\}$$

Soit $h \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$. Posons $C = \int_{-1}^{1} h(t) \,\mathrm{d}t$, g la fonction constante égale à $\frac{1}{2}C$ et $f = h - g$.
Clairement $g \in G$ et $f + g = h$. De plus $\int_{-1}^{1} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} h(t) \,\mathrm{d}t - C = 0$ donc $f \in F$.
Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$$

Finalement F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 22 : [énoncé]
$H \subset \mathbb{K}^n$, $\vec{o} = (0, \dots, 0) \in H$ car $0 + \cdots + 0 = 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in H$. On a

$$\lambda x + \mu \vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$$

avec

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + \mu(y_1 + \cdots + y_n) = 0$$

donc $\lambda x + \mu \vec{y} \in H$.
$\mathrm{Vect}(u) = \mathbb{K}u$ est un sous-espace vectoriel.
Soit $v \in H \cap \mathrm{Vect}(u)$. On peut écrire $v = \lambda u = (\lambda, \dots, \lambda)$ car $v \in \mathrm{Vect}(u)$.
Or $v \in H$ donc $\lambda + \cdots + \lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et donc $v = 0_E$. Ainsi

$$H \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0_E\}$$

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. Posons $\lambda = \frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)$, $\vec{y} = \lambda u$ et $x = v - \vec{y}$.
Clairement $x + \vec{y} = v$, $\vec{y} \in \mathrm{Vect}(u)$. De plus $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec
$x_1 + \cdots + x_n = (v_1 - \lambda) + \cdots + (v_n - \lambda) = (v_1 + \cdots + v_n) - n\lambda = 0$ donc $x \in H$.
Ainsi

$$H + \mathrm{Vect}(u) = \mathbb{K}^n$$

Finalement H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 23 : [énoncé]
F et G sont clairement des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $f \in F \cap G$. On peut écrire $f = \lambda.\sin + \mu.\cos$.
De plus $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$ donne : $\mu = \lambda = -\mu$ d'où $\lambda = \mu = 0$ puis $f = 0$.
Soit $f \in E$. Posons $\lambda = \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2}$, $\mu = \frac{f(0) - f(\pi)}{2}$, $h = \lambda \sin + \mu \cos$ et $g = f - h$.
On a $f = g + h$ avec $g \in F$ et $h \in G$.
Ainsi F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 24 : [énoncé]
a) sans peine
b) L'ensemble des fonctions constantes convient.

Exercice 25 : [énoncé]
a) oui b) non c) non d) oui

Exercice 26 : [énoncé]
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$$

donne
$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'))$
donc

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(x + y, x - y) + \mu(x' + y', x' - y') = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

De plus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x' + y')/2 \\ y = (x' - y')/2 \end{cases}$$

Par suite, chaque $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ possède un unique antécédent par f :

$$((x' + y')/2, (x' - y')/2)$$

f est donc bijective.
Finalement f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et
$f^{-1} : (x', y') \mapsto ((x' + y')/2, (x' - y')/2)$.

Exercice 27 : [énoncé]
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$,

$$J(\lambda f + \mu g) = \int_0^1 \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$$

et par linéarité de l'intégrale

$$J(\lambda f + \mu g) = \lambda \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda J(f) + \mu J(g)$$

De plus $J : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donc J est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 28 : [énoncé]
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'' - 3(\lambda f + \mu g)' + 2(\lambda f + \mu g)$$

puis

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda(f'' - 3f' + 2f) + \mu(g'' - 3g' + 2g)$$

donc

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

De plus $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc φ est un endomorphisme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$f \in \ker\varphi \Leftrightarrow f'' - 3f' + 2f = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2. La solution générale est

$$f(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$$

Par suite

$$\ker\varphi = \left\{C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} / C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$,

$$E_a(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda E_a(f) + \mu E_a(g)$$

Par suite E_a est une application linéaire.
b) $f \in \ker E_a \Leftrightarrow f(a) = 0$. $\ker E_a = \{f \in \mathcal{F}(X, E) / f(a) = 0\}$.
$\mathrm{Im}E_a \subset E$ et $\forall \vec{x} \in E$, en considérant $f : X \to E$ la fonction constante égale à $\vec{x}$, on a $E_a(f) = \vec{x}$. Par suite $\vec{x} \in \mathrm{Im}E_a$ et donc $E \subset \mathrm{Im}E_a$. Par double inclusion $\mathrm{Im}E_a = E$.

Exercice 30 : [énoncé]
a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = (\lambda\psi(f) + \mu\psi(g$$

donc

$$\psi(\lambda f + \mu g) = \lambda\psi(f) + \mu\psi(g)$$

De plus $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ donc φ et ψ sont des endomorphismes de E.

b) On a

$$\forall f \in E, (\varphi \circ \psi) = (\psi(f))' = f$$

car $\psi(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$$

Aussi

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, (\psi \circ \varphi)(f)(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)$$

c) $\varphi \circ \psi$ est bijective donc φ est surjective et ψ injective.
φ est surjective donc $\mathrm{Im}\varphi = E$. $\ker \varphi$ est formé des fonctions constantes.
ψ est injective donc $\ker \psi = \{\tilde{0}\}$. $\mathrm{Im}\psi$ est l'espace des fonctions de E qui s'annulent en 0.

Exercice 31 : [énoncé]
$f(\mathrm{Vect}A)$ est un sous-espace vectoriel de F et $A \subset \mathrm{Vect}A$ donc $f(A) \subset f(\mathrm{Vect}A)$.
Par suite $\mathrm{Vect}f(A) \subset f(\mathrm{Vect}A)$.
Inversement, $f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A donc $A \subset f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))$ puis $f(A) \subset f(f^{-1}(\mathrm{Vect}f(A))) \subset \mathrm{Vect}f(A)$.
Par double inclusion l'égalité.

Exercice 32 : [énoncé]
$\mathrm{Id} = \mathrm{Id} - f^n = (\mathrm{Id} - f)(\mathrm{Id} + f + \dots + f^{n-1})$ et aussi
$\mathrm{Id} = (\mathrm{Id} + f + \dots + f^{n-1})(\mathrm{Id} - f)$.
Par suite $\mathrm{Id} - f$ est inversible et $(\mathrm{Id} - f)^{-1} = \mathrm{Id} + f + \dots + f^{n-1}$.

Exercice 33 : [énoncé]
$(\Rightarrow)$ Supposons $f(A) \subset f(B)$.
Soit $\vec{x} \in A + \ker f$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in A$ et $\vec{v} \in \ker f$.
$f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(A) \subset f(B)$ donc il existe $\vec{w} \in B$ tel que $f(\vec{x}) = f(\vec{w})$.
On a alors $\vec{x} = \vec{w} + (\vec{x} - \vec{w})$ avec $\vec{w} \in B$ et $\vec{x} - \vec{w} \in \ker f$. Ainsi $\vec{x} \in B + \ker f$.
$(\Leftarrow)$ Supposons $A + \ker f \subset B + \ker f$.
Soit $\vec{y} \in f(A)$. Il existe $\vec{x} \in A$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$. Or $\vec{x} \in A \subset A + \ker f \subset B + \ker f$ donc on peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in B$ et $\vec{v} \in \ker f$. On a alors
$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(B)$.

Exercice 34 : [énoncé]
Si $\mathrm{Im}f \subset \ker g$ alors pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}f \subset \ker g$ donc $g(f(x)) = 0_E$.
Ainsi $g \circ f = 0$.
Si $g \circ f = 0$ alors pour tout $x \in E$, $g(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \ker g$. Ainsi

$$\forall x \in E, f(x) \in \ker g$$

donc $\mathrm{Im}f \subset \ker g$.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Soit $x \in \ker f \cap \ker g$ on $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0_E$. Ainsi
$\ker f \cap \ker g \subset \ker f + g$.
b) Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$. Il existe $x \in E$, $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$.
Ainsi $\mathrm{Im}f + g \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$.
c) Soit $x \in \ker f$, $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \ker f^2$. Ainsi
$\ker f \subset \ker f^2$.
d) Soit $y \in \mathrm{Im}f^2$. Il existe $x \in E$, $y = f^2(x) = f(f(x)) = f(\vec{u})$ avec $\vec{u} = f(x)$ donc $y \in \mathrm{Im}f$. Ainsi $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) $(\Rightarrow)$ Supposons $\mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0_E\}$.
L'inclusion $\ker f \subset \ker f^2$ est toujours vraie indépendamment de l'hypothèse.
Soit $x \in \ker f^2$, on a $f^2(x) = f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \ker f$.
De plus $f(x) \in \mathrm{Im}f$ or par hypothèse $\mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0_E$ puis $x \in \ker f$. Ainsi $\ker f^2 \subset \ker f$ puis l'égalité.
$(\Leftarrow)$ Supposons $\ker f = \ker f^2$.
Soit $y \in \mathrm{Im}f \cap \ker f$. On peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$. Or $f(y) = 0_E$ donc $f^2(x) = 0_E$. Ainsi $x \in \ker f^2 = \ker f$ et par suite $y = f(x) = 0_E$. Finalement $\mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0_E\}$.
b) $(\Rightarrow)$ Supposons $E = \mathrm{Im}f + \ker f$.
L'inclusion $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$ est vraie indépendamment de l'hypothèse.
Soit $y \in \mathrm{Im}f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Im}f$ et $v \in \ker f$.
Puisque $u \in \mathrm{Im}f$, on peut écrire $u = f(a)$ avec $a \in E$. On a alors
$y = f(f(a) + v) = f^2(a) + f(v) = f^2(a) \in \mathrm{Im}f^2$. Ainsi $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}f^2$ puis l'égalité.
$(\Leftarrow)$ Supposons $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$. L'inclusion $\mathrm{Im}f + \ker f \subset E$ est toujours vraie.
Inversement, soit $x \in E$. $f(x) \in \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$ donc il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$.
Posons $u = f(a)$ et $v = x - u$.
Clairement $x = u + v$, $u \in \mathrm{Im}f$. De plus $f(v) = f(x) - f(u) = f(x) - f^2(a) = 0$ donc $v \in \ker f$.
Finalement $E = \mathrm{Im}f + \ker f$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Posons $g = \frac{1}{2}(3\mathrm{Id} - f) \in \mathcal{L}(E)$. On a $f \circ g = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}f^2 = \mathrm{Id}$ et de même $g \circ f = \mathrm{Id}$ donc f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.
b) En tant que noyaux d'applications linéaires, $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $x \in \ker(f - \mathrm{Id}) \cap \ker(f - 2\mathrm{Id})$. On a $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$ donc $x = 0_E$. Ainsi

$$\ker(f - \mathrm{Id}) \cap \ker(f - 2\mathrm{Id}) = \{0_E\}$$

Soit $x \in E$. Posons $u = 2x - f(x)$ et $v = f(x) - x$.
On a $u + v = x$, $f(u) = 2f(x) - f^2(x) = 2x - f(x) = u$ donc $u \in \ker(f - \mathrm{Id})$ et $f(v) = f^2(x) - f(x) = 2f(x) - 2x = 2v$ donc $v \in \ker(f - 2\mathrm{Id})$. Ainsi

$$E = \ker(f - \mathrm{Id}) + \ker(f - 2\mathrm{Id})$$

Finalement, $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Soit $x \in \ker h$. On $g \circ h(x) = 0$ donc $x \in \ker f$. Ainsi $\ker h \subset \ker f$.
De même $\ker f \subset \ker g$ et $\ker g \subset \ker h$ d'où l'égalité des noyaux.
Soit $y \in \mathrm{Im}h$, il existe $x \in E$ tel que $h(x) = y$. Mais alors $f(g(x)) = y$ donc $y \in \mathrm{Im}f$.
Ainsi $\mathrm{Im}h \subset \mathrm{Im}f$ et de même $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}h$ d'où l'égalité des images.
b) On remarque

$$f^2 = (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g^2$$

et

$$f^2 = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h^2$$

On a alors

$$f = g \circ h = g \circ (f \circ g) = g \circ (g \circ h) \circ (h \circ f) = g^2 \circ h^2 \circ f = f^5$$

c) Si $x \in \mathrm{Im}f \cap \ker f$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et on a $f(x) = 0$. On a donc

$$x = f(a) = f^5(a) = f^4(x) = 0$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0\}$$

Par une éventuelle analyse-synthèse, on remarque que pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = f^4(x) + \left(x - f^4(x)\right)$$

avec

$$f^4(x) \in \mathrm{Im}f \text{ et } x - f^4(x) \in \ker f$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}f + \ker f = E$$

Finalement les espaces $\mathrm{Im}f$et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 39 : [énoncé]
On a toujours $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
Inversement, pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $g \circ f(x) = 0$ donc $f \circ g \circ f(x) = f(0) = 0$.
Or $f \circ g = \mathrm{Id}$ donc $f(x) = 0$.
Ainsi $\ker(g \circ f) \subset \ker f$ puis $\ker(g \circ f) = \ker f$.
On a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}g$.
Inversement, pour $y \in \mathrm{Im}g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors $y = g \circ f \circ g(x) = (g \circ f)(g(x)) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.
Ainsi $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}(g \circ f)$ puis $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}g$
Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}g$. Il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$ et alors $f(x) = 0$ donne $f(g(a)) = 0$ d'où $a = 0$ car $f \circ g = \mathrm{Id}$. On en déduit $x = g(a) = 0$ et donc $\ker f \cap \mathrm{Im}g = \{0\}$.
Soit $x \in E$. On peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec $g(f(x)) \in \mathrm{Im}g$ et $x - g(f(x)) \in \ker f$ car

$$f\left(x - g(f(x))\right) = f(x) - (f \circ g)(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$$

Ainsi $E = \ker f + \mathrm{Im}g$ et finalement $\ker f$ et $\mathrm{Im}g$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 40 : [énoncé]
a) Evidemment $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}g$.
Pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker f$.
Pour $y \in \mathrm{Im}g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors $y = g(f(g(x)) = g(f(a)) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.
b) Si $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$, $a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x)) + g(f(x))$ avec $x - g(f(x)) \in \ker f$ et $g(f(x)) \in \mathrm{Im}g$.
c) Si f est inversible alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$.
Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.
d) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 41 : [énoncé]
a) Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \ker g$.
Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc

$$x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = 0$$

Soit $x \in E$.
Analyse :
Supposons $x = u + v$ avec $u = f(a) \in \mathrm{Im} f$ et $v \in \ker g$.
$g(x) = g \circ f(a)$ donc $(f \circ g)(x) = f(a) = u$.
Synthèse :
Posons $u = (f \circ g)(x)$ et $v = x - u$.
On a $u \in \mathrm{Im} f$, $x = u + v$ et $g(v) = g(x) - g(u) = 0$ i.e. $v \in \ker g$.
b) On a $f(\mathrm{Im} g) \subset \mathrm{Im} f$ et pour tout $y \in \mathrm{Im} f$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x = g(a) + u$ et $u \in \ker f$.
On a alors $y = f(g(a)) \in f(\mathrm{Im} g)$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) $(\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2$ donc $(\mathrm{Id} - p)^2 = (\mathrm{Id} - p) \Leftrightarrow p = p^2$.
b) $p \circ (\mathrm{Id} - p) = \tilde{0}$ donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) \subset \ker p$.
Inversement, soit $x \in \ker p$, on a $(\mathrm{Id} - p)(x) = x - p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.
Ainsi $\ker p \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.
Finalement $\ker p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$ et de même $\ker(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im} p$.

Exercice 43 : [énoncé]
(i)$\Rightarrow$(ii) Supposons (i)
$p^2 = p \circ q \circ p = p \circ q = p$ et $q^2 = q \circ p \circ q = q \circ p = q$ donc p et q sont des projecteurs.
Soit $x \in \ker p$. On a $q(x) = q(p(x)) = 0_E$ donc $x \in \ker q$. Ainsi $\ker p \subset \ker q$. Par symétrie l'égalité.
(ii)$\Rightarrow$(i) Supposons (ii)
Soit $x \in E$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Im} q$ et $v \in \ker q = \ker p$.
D'une part $(p \circ q)(x) = p(q(u)) + p(0_E) = p(u)$ et d'autre part $p(x) = p(u) + p(v) = p(u)$.
Ainsi $p \circ q = p$ et de même $q \circ p = q$.

Exercice 44 : [énoncé]
$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur.
Soit $x \in \ker p + \ker q$, il existe $(u, v) \in \ker p \times \ker q$ tels que $x = u + v$ et alors

$$(p \circ q)(x) = (p \circ q)(u) + (p \circ q)(v) = (q \circ p)(u) + (p \circ q)(v) = 0_E$$

donc $x \in \ker p \circ q$.
Ainsi

$$\ker p + \ker q \subset \ker p \circ q$$

Inversement, soit $x \in \ker p \circ q$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \ker p$ et $v \in \mathrm{Im} p$.

$$(p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(v) = 0_E$$

donc $v \in \ker q$. Par suite $x \in \ker p + \ker q$.
Par double inclusion

$$\ker p \circ q = \ker p + \ker q$$

Soit $y \in \mathrm{Im} p \circ q$, il existe $x \in E$ tel que $y = (p \circ q)(x)$. On a $y = p(q(x)) \in \mathrm{Im} p$ et $y = q(p(x)) \in \mathrm{Im} q$ donc $y \in \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q$. Ainsi $\mathrm{Im} p \circ q \subset \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q$.
Inversement, soit $y \in \mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q$. Il existe $x \in E, y = q(x)$ et $y = p(y) = (p \circ q)(x) \in \mathrm{Im} p \circ q$.
Ainsi $\mathrm{Im} p \cap \mathrm{Im} q \subset \mathrm{Im} p \circ q$ puis l'égalité.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Soit $\vec{x} \in \ker f$, $f(g(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) = g(0_E) = 0_E$ donc $g(\vec{x}) \in \ker f$. Ainsi $\ker f$ est stable par g.
Soit $\vec{y} \in \mathrm{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$ et alors $g(\vec{y}) = g(f(\vec{x})) = f(g(\vec{x})) \in \mathrm{Im} f$ donc $\mathrm{Im} f$ est stable par g.
b) ($\Rightarrow$) immédiat via a).
($\Leftarrow$) Si $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f alors, puisque ces derniers sont supplémentaires dans E. Soit $\vec{x} \in E$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \mathrm{Im} p$ et $\vec{v} \in \ker p$.
On a alors $(f \circ p)(\vec{x}) = f(p(\vec{u}) + p(\vec{v})) = f(\vec{u})$ et $p \circ f(\vec{x}) = p(f(\vec{u})) + p(f(\vec{v})) = f(\vec{u})$ car $f(\vec{u}) \in \mathrm{Im} p$ et $f(\vec{v}) \in \ker p$. Ainsi

$$\forall \vec{x} \in E, (f \circ p)(\vec{x}) = (p \circ f)(\vec{x})$$

puis p et f commutent.

Exercice 46 : [énoncé]
a) F et G sont des sous-espaces vectoriels car noyaux d'endomorphismes.
Soit $\vec{x} \in F \cap G$. On a $s(\vec{x}) = \vec{x}$ et $s(\vec{x}) = -\vec{x}$ donc $\vec{x} = \vec{o}$. Ainsi $F \cap G = \{\vec{o}\}$.
Soit $\vec{x} \in E$. Posons $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{x} + s(\vec{x}))$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{x} - s(\vec{x}))$.

On a $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$, $s(\vec{u})=\vec{u}$ donc $\vec{u}\in F$ et $s(\vec{v})=-\vec{v}$ donc $\vec{v}\in G$.
Ainsi $F+G=E$. F et G sont donc supplémentaires dans E.
b) $\forall\vec{x}\in E$, $\exists!(\vec{u},\vec{v})\in F\times G$ tel que $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$.
On a $s(\vec{x})=s(\vec{u})+s(\vec{v})=\vec{u}-\vec{v}$ donc x est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
c) F et G sont des sous-espaces vectoriels car noyaux d'endomorphismes.
Soit $\vec{x}\in F\cap G$. On a $f(\vec{x})=\vec{x}$ et $f(\vec{x})=\alpha\vec{x}$ donc $\vec{x}=\vec{o}$. Ainsi $F\cap G=\{\vec{o}\}$.
Soit $\vec{x}\in E$. Posons $\vec{u}=\frac{1}{1-\alpha}(f(\vec{x})-\alpha\vec{x})$ et $\vec{v}=\frac{1}{1-\alpha}(\vec{x}-f(\vec{x}))$.
On a $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$, $f(\vec{u})=\vec{u}$ donc $\vec{u}\in F$ et $f(\vec{v})=\alpha\vec{v}$ donc $\vec{v}\in G$.
Ainsi $F+G=E$. F et G sont donc supplémentaires dans E.
d) $\forall\vec{x}\in E$, $\exists!(\vec{u},\vec{v})\in F\times G$ tel que $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$.
On a $f(\vec{x})=f(\vec{u})+f(\vec{v})=\vec{u}+\alpha\vec{v}$ donc f est l'affinité par rapport à F parallèlement à G et de rapport α.

Exercice 47 : [énoncé]
Soit $\vec{x}\in\ker(f-\mathrm{Id})\cap\ker(f-3\mathrm{Id})$. On a $f(\vec{x})=\vec{x}$ et $f(\vec{x})=3\vec{x}$ donc $\vec{x}=\vec{o}$.
Soit $\vec{x}\in E$. Posons $\vec{u}=\frac{1}{2}\left(3\vec{x}-f(\vec{x})\right)$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\left(f(\vec{x})-\vec{x}\right)$.
On a $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in\ker(f-\mathrm{Id})$ et $\vec{v}\in\ker(f-3\mathrm{Id})$ après calculs.
f est l'affinité vectorielle par rapport à $F=\ker(f-\mathrm{Id})$, parallèlement à $G=\ker(f-3\mathrm{Id})$ et de rapport 3.

Exercice 48 : [énoncé]
$\varphi:u\mapsto u\circ p$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ donc $L=\mathrm{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
$\psi:v\mapsto v\circ q$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ donc $M=\mathrm{Im}\psi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Soit $f\in L\cap M$. Il existe $u,v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $f=u\circ p=v\circ q$.
On a $f\circ p=u\circ p^2=u\circ p=f$ et $f\circ p=v\circ q\circ p=0$ car $q\circ p=0$ donc $f=0$.
Ainsi $L\cap M=\{0\}$.
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a $f=f\circ\mathrm{Id}=f\circ(p+q)=f\circ p+f\circ q\in L+M$. Ainsi $\mathcal{L}(E)=L+M$.
Finalement L et M sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 49 : [énoncé]
Soient $f\in\mathcal{L}(E)$ et $t=t_u$ où $u\in E$. Soit $x\in E$

$$(f\circ t)(x)=(t\circ f)(x)\Leftrightarrow f(x)+f(u)=f(x)+u\Leftrightarrow f(u)=u$$

Une translation est un endomorphisme commutent si, et seulement si, le vecteur de translation est invariant par l'endomorphisme.

Exercice 50 : [énoncé]
Si $\vec{a}\in F$ alors $V=\vec{a}+F=F$ est un sous-espace vectoriel.
Inversement, si V est un sous-espace vectoriel alors $\vec{o}\in V$ donc il existe $\vec{b}\in F$ tel que $\vec{o}=\vec{a}+\vec{b}$.
On a alors $\vec{a}=-\vec{b}\in F$. La condition cherchée et $\vec{a}\in F$.

Exercice 51 : [énoncé]
($\Rightarrow$) Supposons $V\cap W\neq\emptyset$. Soit $\vec{x}\in V\cap W$. On peut écrire $\vec{x}=\vec{a}+\vec{u}=\vec{b}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in F$ et $\vec{v}\in G$.
On a alors $\vec{b}-\vec{a}=\vec{u}+(-\vec{v})\in F+G$.
($\Leftarrow$) Inversement, si $\vec{b}-\vec{a}\in F+G$ alors on peut écrire $\vec{b}-\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in F$ et $\vec{v}\in G$.
On alors $\vec{x}=\vec{a}+\vec{u}=\vec{b}-\vec{v}\in V\cap W$.

Exercice 52 : [énoncé]
$V=\vec{a}+F$, $W=\vec{b}+G$.
Posons $V'=\vec{a}+(F+G)$ et $W'=\vec{b}+(F+G)$.
V' et W' sont deux sous-espaces affines de même direction contenant respectivement F et G.
Si $V'\cap W'\neq\emptyset$. Considérons $\vec{x}\in V'\cap W'$.
On peut écrire $\vec{x}=\vec{a}+(\vec{u}+\vec{v})=\vec{b}+(\vec{u}'+\vec{v}')$ avec $\vec{u},\vec{u}'\in F$ et $\vec{v},\vec{v}'\in G$.
On a alors $\vec{a}+(\vec{u}-\vec{u'})=b+(\vec{v}'-\vec{v})\in V\cap W$ ce qui est exclu car V et W disjoints.
Ainsi V' et W' sont disjoints.

Exercice 53 : [énoncé]
Soient $\lambda\in[0,1]$ et $u,v\in C$. Etudions $\lambda u+(1-\lambda)v$.
On peut écrire $u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)$ et $v=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$ avec $u_1,v_1\in\mathcal{C}_1$ et $u_2,v_2\in\mathcal{C}_2$.
On observe alors

$$\lambda u+(1-\lambda)v=\frac{1}{2}(w_1+w_2)$$

avec

$$w_1=(\lambda u_1+(1-\lambda)v_1)\in\mathcal{C}_1\text{ et }w_2=\frac{1}{2}(\lambda u_2+(1-\lambda)v_2)\in\mathcal{C}_2$$

Ainsi $\lambda u+(1-\lambda)v\in\mathcal{C}$.

Exercice 54 : [énoncé]
Soient $a \in V$ et $F = \{b - a / b \in V\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E, ce qui, puisque $V = a + F$ assure que V est un sous-espace affine.
$F \subset E$ et $0_E = a - a \in F$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in F$. Puisque $a \in V$ et $a + u \in V$ on a

$$a + \lambda u = (1 - \lambda)a + \lambda(a + u) \in V$$

donc $\lambda.u \in F$.
Soient $u, v \in F$. On a $a + u \in V$ et $b + v \in V$ donc

$$a + \frac{1}{2}(u + v) = \frac{1}{2}(a + u) + \frac{1}{2}(a + v) \in V$$

et donc $\frac{1}{2}(u + v) \in F$ puis $u + v \in F$ en vertu de la propriété précédente.
Finalement F est un sous-espace vectoriel de E.