Extrait du CNC 2009

Notations

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M et $\mathrm{rg}\,(M)$ son rang.

Pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leqslant k$.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels **deux à deux distincts** ; on note π le polynôme $\pi = (X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_n)$.

Enfin, pour tout entier naturel m, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} f_m : & \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$$

1ère Partie : Étude de l'application f_m

Sot m un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ est tel que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $R(x_i) = 0$, montrer que R est le polynôme nul.
2. Vérifier que f_m est une application linéaire.
3. Dans cette question, on suppose que $m \geqslant n + 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f_m = \{Q\pi \ ; \ \ Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$
   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.
   (c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\, f_m$ puis en donner une base.
   (d) Déterminer le rang de f_m ; l'application f_m est-elle surjective ?
4. Dans cette question, on suppose que $m \leqslant n$.
   (a) Montrer que f_m est injective.
   (b) Quel est le noyau de f_m ? Quel est son rang ?
   (c) À quelle condition sur les entiers n et m l'application f_m est-elle surjective ?
5. On définit les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ par $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
   (a) Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, quel est le degré de L_i ? Vérifier que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.
   (b) Calculer $f_n(L_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Que représente la famille $\big(f_n(L_0), f_n(L_1), \ldots, f_n(L_n)\big)$ pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$?
   (c) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.
   (d) Soit $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
      i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.
      ii. Exprimer le polynôme P_y en fonction de $L_0, L_1, \ldots, L_n$ et $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

2ème Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par une fonction φ, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(x_i)\big)^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale λ_m de la dite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction φ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

A. Étude dans le cas $m \geqslant n+1$

1. Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$?

2. En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser à l'aide de Q_0 et $\operatorname{Ker} f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

B. Étude dans le cas $m \leqslant n$

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que si $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$ et que, si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(M'N') = {}^tN'\,{}^tM'$; p, q et r étant des entiers naturels non nuls.

2. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.

   (a) Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par P_v aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   (b) Montrer alors que si $Av = 0$ alors $v = 0$.

Solution

$1^{ère}$ Partie : Étude de l'application f_m

Soit m un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ est tel que pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $R(x_i) = 0$, montrer que R est le polynôme nul.

1. R étant un polynôme de degré inférieure ou égal à n, admettant $n+1$ racines distintes, donc R est le polynôme nul.

2. Vérifier que f_m est une application linéaire.

2. Soient $P, Q \in \mathcal{P}_m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned} f_m(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(x_0), ..., (P + \lambda Q)(x_n)) \\ &= (P(x_0), ..., P(x_n)) + \lambda(Q(x_0), ..., Q(x_n)) \\ &= f_m(P) + \lambda f_m(Q) \end{aligned}$$

Donc f_m est une application linéaire.

3. Dans cette question, on suppose que $m \geq n + 1$.

(a) Montrer que $\text{Ker } f_m = \{Q\pi; \quad Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$.

Soit $P \in \mathcal{P}_m$, on a :

$P \in \ker(f_m) \iff f_m(P) = (0, ..., 0)$

$\iff (P(x_0), ..., P(x_n)) = (0, ..., 0)$

$\iff P(x_0) = ... = P(x_n) = 0$

$\iff (X - x_0) ... (X - x_n) / P$ (car les x_i sont distincts 2 à 2)

$\iff \pi / P$

$\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = Q\pi$

$P \in \ker(f_m) \iff (\exists Q \in \mathcal{P}_{m-n-1},\ P = Q\Pi)$

($\leq m$; $= n+1$; car $d^\circ P = d^\circ Q + d^\circ \Pi$; $\Rightarrow d^\circ Q \leq m-n-1$)

D'où $\boxed{\ker(f_m) = \{Q\Pi \,/\, Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}}$

---

3. Dans cette question, on suppose que $m \geq n+1$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f_m = \{Q\pi;\quad Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$.

(b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.

On veut montrer que : $\mathcal{P}_m = \ker(f_m) \oplus \mathcal{P}_n$

On ne va pas penser à la dimension, puisqu'elle est demandée dans la question suivante.

(2) $\ker(f_m) \cap \mathcal{P}_n = \{0\}$?

Soit $R \in \ker(f_m) \cap \mathcal{P}_n$. Montrer que $R = 0$.

On a $f_m(P) = 0 \Rightarrow (\forall i \in \{0, \dots, n\},\ P(x_i) = 0)$

et on a $d^\circ(P) \leq n$

1) $\Rightarrow \boxed{P = 0}$

(3) Soit $P \in \mathcal{P}_m$. Montrer qu'il existe $(P_1, P_2) \in \ker(f_m) \times \mathcal{P}_n$ tel que $P = P_1 + P_2$.

Càd qu'il existe $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$ et $P_2 \in \mathcal{P}_n$ tels que $P = Q\Pi + P_2$.

La division euclidienne sote aux yeux !

La division euclidienne de P par π implique qu'il existe Q et R tels que :

$$\begin{cases} P = Q\pi + R \\ \deg(R) < \underbrace{\deg(\pi)}_{=n+1} \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} P = Q\pi + R \\ \text{et } R \in \mathcal{P}_n \end{cases}$

et c'est fini (R c'est P_2).

---

3. Dans cette question, on suppose que $m \geq n+1$.

   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f_m = \{Q\pi ; \quad Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$.

   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.

   (c) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f_m$ puis en donner une base.

(i) $\dim(\ker(f_m)) = ?$

Or $\mathcal{P}_m = \ker(f_m) \oplus \mathcal{P}_n$ donc $\underbrace{\dim \mathcal{P}_m}_{=m+1} = \dim(\ker(f_m)) + \underbrace{\dim \mathcal{P}_n}_{=n+1}$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\ker(f_m)) = m-n}$$

(ii) Déterminons une base de $\ker(f_m)$

On a $\ker(f_m) = \{ Q\pi \,/\, \deg(Q) \leq m-n-1 \}$

$$\ker(f_m) = \{ (a_0 + a_1 X + \cdots + a_{m-n-1} X^{m-n-1})\pi \,/\, a_0, \ldots, a_{m-n-1} \in \mathbb{R} \}$$

$$\ker(f_m) = \{ a_0\pi + a_1 X\pi + \cdots + a_{m-n-1} X^{m-n-1}\pi \,/\, a_0, \ldots, a_{m-n-1} \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow \ker(f_m) = \text{Vect}(\pi, X\pi, \dots, X^{m-n-1}\pi)$

D'où $(\pi, X\pi, \dots, X^{m-n-1}\pi)$ est une famille génératrice de $\ker(f_m)$.

Or $\text{card}(\pi, X\pi, \dots, X^{m-n-1}\pi) = m-n = \dim(\ker(f_m))$

Alors $(\pi, X\pi, \dots, X^{m-n-1}\pi)$ est une base de $\ker(f_m)$.

---

3. Dans cette question, on suppose que $m \geq n+1$.

   (a) Montrer que $\text{Ker } f_m = \{Q\pi; \quad Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$.

   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.

   (c) En déduire la dimension de $\text{Ker } f_m$ puis en donner une base.

   (d) Déterminer le rang de f_m ; l'application f_m est-elle surjective ?

i) $\text{rg}(f_m) = ?$

$f_m \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m, \mathbb{R}^{n+1})$, alors d'après le théorème du rang :

esp-départ

$$\underbrace{\dim(\mathcal{P}_m)}_{=m+1} = \underbrace{\dim(\ker(f_m))}_{=m-n} + \text{rg}(f_m)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rg}(f_m) = n+1}$$

ii) f_m est-elle surjective ?

On a $f_m \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m, \mathbb{R}^{n+1})$, alors :

$$f_m \text{ surjective} \iff \text{rg}(f_m) = \dim(\underbrace{\mathbb{R}^{n+1}}_{\text{espace d'arrivée}})$$

Or $\operatorname{rg}(f_m) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$

Alors f_m est surjective.

---

4. Dans cette question, on suppose que $m \leq n$.

(a) Montrer que f_m est injective.

On a $f_m \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m, \mathbb{R}^{n+1})$.

Soit $P \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(P) = 0$. Montrer que $P = 0$

On a $\begin{cases} P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0 \\ \deg(P) \leq m \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0 \\ \deg(P) \leq n \quad (\text{car } m \leq n) \end{cases}$

cf 1) $\Rightarrow P = 0$

D'où f_m est injective

---

4. Dans cette question, on suppose que $m \leq n$.

(a) Montrer que f_m est injective.

(b) Quel est le rang de f_m ?

On a $f_m \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m, \mathbb{R}^{n+1})$.

D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim(\mathcal{P}_m)}_{=m+1} = \underbrace{\dim(\ker(f_m))}_{=\dim(\{0\})=0} + \operatorname{rg}(f_m)$$

D'où $\boxed{\operatorname{rg}(f_m) = m+1}$

4. Dans cette question, on suppose que $m \leq n$.

(a) Montrer que f_m est injective.

(b) Quel est le rang de f_m ?

(c) À quelle condition sur les entiers n et m l'application f_m est-elle surjective ?

On a $f_m \in \mathcal{L}(\mathbb{P}_m, \mathbb{R}^{n+1})$ et $\operatorname{rg}(f_m) = m+1$.

D'autre part :

f_m surjective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f_m) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$ (espace d'arrivée)

$\Leftrightarrow m+1 = n+1$

$\Leftrightarrow m = n$

5. On définit les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ par $L_i = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(a) Pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, quel est le degré de L_i ? Vérifier que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.

i) $\deg(L_i) = n$

ii) Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

On veut vérifier que $L_i(x_k) = \delta_{ik}$

Autrement dit que :

$$L_i(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i$$
$$L_i(x_i) = 1$$

Les racines du polynôme sont les x_j avec $j \neq i$.

D'où $L_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j \neq i} 1 = 1$$

CQFD

(b) Calculer $f_n(L_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Que représente la famille $(f_n(L_0), f_n(L_1), \ldots, f_n(L_n))$ pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$?

(i) $f_n(L_i) = ?$ i pour $i \in [\![0, n]\!]$.

$f_n(L_i) = (L_i(x_0), \ldots, L_i(x_n))$ $\qquad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

$= (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

↳ place numéro i, en commençant par 0.

(ii) La famille $(f_n(L_0), \ldots, f_n(L_n))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$

(c) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

On a $f_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathbb{R}^{n+1})$

D'après 4) c) on a f_n surjective.

Or $\dim(\mathcal{P}_n) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$

D'où f_n est bijective i.e. f_n isomorphisme de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Et puisque $(f_n(L_0), \ldots, f_n(L_n))$ base de $\mathbb{R}^{n+1}$

Alors $f_n^{-1}(f_n(L_0), \ldots, f_n(L_n))$ est une base de $\mathcal{P}_n$, comme image d'une base par un isomorphisme.

On a bien $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$

(d) Soit $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

Soit $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. M que :

$$\left(\exists ! P_y \in \mathcal{P}_n \,,\, f_n(P_n) = (y_0, \ldots, y_n)\right)$$

Ça laisse penser à montrer que : $f_n : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est bijective.

Ce qui est le cas (déjà justifié).

(d) Soit $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

ii. Exprimer le polynôme P_y en fonction de $L_0, L_1, \ldots, L_n$ et $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

$f_n : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$f_n(P_y) = (y_0, \ldots, y_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i f_n(L_i) \text{ car } (f_n(L_i))_i \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$\Rightarrow f_n(P_y) = f_n\left(\sum_{i=0}^{n} y_i L_i\right) \quad (f_n \text{ linéaire})$$

D'où $\boxed{P_y = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i}$ car f_n injective.

2ème Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par une fonction φ, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(x_i)\big)^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale λ_m de la dite quantité.

A. Étude dans le cas $m \geqslant n+1$

1. Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$?

(a)

On a $\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ \varphi(x_i) = y_i$

$\phi_m : \mathcal{P}_m \longrightarrow \mathbb{R}$; $\phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$

On veut un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $(Q_0(x_0), \ldots, Q_0(x_n)) = (y_0, \ldots, y_n)$

d) $\Rightarrow f_n(P_y) = (y_0, \ldots, y_n)$; càd $(P_y(x_0), \ldots, P_y(x_n)) = (y_0, \ldots, y_n)$

On a $\deg(P_y) \leqslant n \leqslant m$, alors $\boxed{Q_0 = P_y \text{ convient}}$

(b) $\phi_m(Q_0) = ?$

$$\phi_m(Q_0) = \phi_m(P_y) = \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - \underbrace{P_y(x_i)}_{= y_i}\big)^2 = 0$$

---

2. En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser à l'aide de Q_0 et $\mathrm{Ker}\, f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

(a) $\lambda_m = ?$

$$\lambda_m = \min_{P \in \mathcal{P}_m} \left(\phi_m(P)\right) = ?$$

On a :

$$\forall P \in \mathcal{P}_m,\ \phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - P(x_i)\right)^2 \geqslant 0 = \phi_m(Q_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall P \in \mathcal{P}_m,\ \phi_m(P) \geqslant \phi_m(Q_0) \\ Q_0 \in \mathcal{P}_m \end{cases}$$

⚠ D'où $\min_{P \in \mathcal{P}_m} \left(\phi_m(P)\right) = \phi_m(Q_0)$

Ainsi $\lambda_m = \min_{P \in \mathcal{P}_m} \left(\phi_m(P)\right) = 0$

---

2. En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser à l'aide de Q_0 et $\mathrm{Ker}\, f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

(b) Notons H l'ensemble des polynômes $S \in \mathcal{P}_m$ tels que

$$\min_{P \in \mathcal{P}_m} \left(\phi_m(P)\right) = \phi_m(S)$$

$$H = \left\{ S \in \mathcal{P}_m \ /\ \phi_m(S) = 0 \right\}$$

Soit $S \in \mathcal{P}_m$. On a :

$$S \in H \iff \phi_m(S) = 0$$

$$\iff \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - S(x_i)\right)^2 = 0$$

$$\overset{!!}{\iff} \left(\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ \left(y_i - S(x_i)\right)^2 = 0\right) \quad \text{(Somme nulle de nombres positifs)}$$

$$\iff \left(\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ S(x_i) = y_i\right)$$

$$\iff \left(\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ S(x_i) = Q_0(x_i)\right) \quad \Big\| \quad \forall i,\ y_i = P_y(x_i) \text{ via } f_n(P_y) = (y_0, \dots, y_n)$$

$$\iff \left(\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n,\ (S - Q_0)(x_i) = 0\right)$$

$$\iff \left((S - Q_0)(x_0), \dots, (S - Q_0)(x_n)\right) = (0, \dots, 0)$$

$$\iff f_m(S - Q_0) = 0$$

$$\boxed{S \in H \iff (S - Q_0) \in \ker(f_m)}$$

B. Étude dans le cas $m \leqslant n$

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que si $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$ et que, si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(M'N') = {}^tN'\,{}^tM'$; p, q et r étant des entiers naturels non nuls.

a) $\left({}^t(M+N)\right)_{ij} \overset{?}{=} \left({}^tM\right)_{ij} + \left({}^tN\right)_{ij}$

$$\left({}^t(M+N)\right)_{ij} = \left(M+N\right)_{ji} = M_{ji} + N_{ji} = \left({}^tM\right)_{ij} + \left({}^tN\right)_{ij}$$

b) $\left({}^t(M'N')\right)_{ij} \overset{?}{=} \left({}^tN'\ {}^tM'\right)_{ij}$

$$\left({}^t(M'N')\right)_{ij} = (M'N')_{ji}$$

$$= \sum_k M'_{jk} N'_{ki}$$

$$= \sum_k N'_{ki} M'_{jk}$$

$$= \sum_k \left({}^tN'\right)_{ik} \left({}^tM'\right)_{kj}$$

$$= \left({}^tN'\ {}^tM'\right)_{ij}$$

---

2. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.

(a) Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par P_v aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_0 + v_1 x_0 + \cdots + v_m x_0^m \\ \vdots \\ v_0 + v_1 x_n + \cdots + v_m x_n^m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_v(x_0) \\ \vdots \\ P_v(x_n) \end{pmatrix}$$

---

2. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.

(a) Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par P_v aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(b) Montrer alors que si $Av = 0$ alors $v = 0$.

Supp que $Av=0$ et m que $v=0$

$Av=0 \Rightarrow (\forall 0 \leq i \leq n,\ P_v(x_i)=0)$

Or $\deg(P_v) \leq m \leq n$

Alors $\begin{pmatrix} \forall 0 \leq i \leq n,\ P_v(x_i)=0 \\ \deg(P_v) \leq n \end{pmatrix}$

D'où $P_v = 0$ (d'après 1)

$\Rightarrow (\forall 0 \leq k \leq n,\ v_k = 0)$

C'ad $\boxed{v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$