X-ENS

FILIÈRE MP

Corrigé de l'épreuve: Mathématiques A - (XLC)

En plus des données de l'énoncé on munit $\mathbb{C}^n$ (qu'on confond avec $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$) de son produit scalaire canonique

$$\langle X, Y\rangle = {}^t\overline{X}Y$$

Produit scalaire dont dérive la norme $\|.\|_2$. Nous allons utiliser dans ce corrigé la propriété évidente

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^n)^2,\ \langle AX, Y\rangle = {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A}Y = \langle X, {}^t\overline{A}Y\rangle$$

I. Première partie

En général

tout $\mathbb{C}$-ev E est aussi un $\mathbb{R}$-ev. S'il est de dimension finie alors

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2\dim_{\mathbb{C}} E$$

car si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une $\mathbb{C}$-base de E alors $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de E.

Vocabulaire

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\overline{A} = A$ est dite hermitienne, si ${}^t\overline{A} = -A$ elle est dite antihermitienne.
$\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes de trace nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1*a.* En tant que $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est de dimension 8.

En interprétant les conditions ${}^t\overline{A} = -A$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, un élément A de $\mathcal{L}$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} i\alpha & z \\ -\overline{z} & -i\alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Ou encore (en posant $z = x + iy$)

$$A = \alpha\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \alpha E + xF + yG$$

où maintenant α, x, y sont quelconques dans $\mathbb{R}$. Alors (E, F, G) est une famille génératrice de $\mathcal{L}$ (en tant que sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$). (E, F, G) est libre puisque si $A = \alpha F + xF + yG = 0$ alors $i\alpha = 0$ et $x + iy = 0$, soit $\alpha = x = y = 0$. (E, F, G) est donc une base de $\mathcal{L}$.

N.B: $\mathcal{L}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que $\mathbb{C}$-ev. Par exemple $E = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{L}$, mais $iE = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin \mathcal{L}$.

1*b.* Tous calculs fait

$$[\mathrm{E},\mathrm{F}] = -2\mathrm{G}\,,\ [\mathrm{F},\mathrm{G}] = -2\mathrm{E} \text{ et } [\mathrm{G},\mathrm{E}] = -2\mathrm{F}$$

Précision

Cela implique que $\mathscr{L}$ est "stable" par l'application $(u,v)\mapsto[u,v]$ dans le sens où

$$\forall(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{L}^2,\ [\mathrm{A},\mathrm{B}]\in\mathscr{L}$$

2a. En utilisant la norme d'algèbre $|||.|||$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\left|\left|\left|\frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right|\right|\right| \leqslant \frac{|||\mathrm{A}|||^k}{k!}$$

la série numérique $\sum\frac{|||\mathrm{A}|||^k}{k!}$ est convergente car la série entière $\sum\frac{z^k}{k!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Donc la série $\sum\frac{\mathrm{A}^k}{k!}$ est absolument convergente. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est complet (il est de dimension finie) alors elle est convergente.

2b. Pour tout $q\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{q}\frac{(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})^k}{k!} = \mathrm{P}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{q}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)\mathrm{P}$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{q}\frac{(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})^k}{k!}\right)_q$ converge vers $\exp(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})$ et par continuité de l'application linéaire $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\longmapsto\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$, la suite $\left(\mathrm{P}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{q}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}\right)\mathrm{P}\right)_q$ converge vers $\mathrm{P}^{-1}\exp(\mathrm{A})\mathrm{P}$. Par unicité de la limite d'une suite on a donc

$$\exp(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathrm{P}\exp(\mathrm{A})\mathrm{P}$$

2c. Si A est une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, ses puissances A^k sont des matrice triangulaires supérieures de coefficients diagonaux $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\dots,\lambda_n^k$, ce qui est donc aussi le cas de la somme partielle $\sum_{k=0}^{q}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}$ qui a pour coefficients diagonaux $\sum_{k=0}^{q}\frac{\lambda_1^k}{k!},\sum_{k=0}^{q}\frac{\lambda_2^k}{k!},\dots,\sum_{k=0}^{q}\frac{\lambda_n^k}{k!}$. La limite $\exp(\mathrm{A})$ de ces sommes partielles, dont les coefficients sont les limites de ceux de même position de $\sum_{k=0}^{q}\frac{\mathrm{A}^k}{k!}$, est donc triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\dots,e^{\lambda_n}$.

2d. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathrm{C})$ et soient une matrice triangulaire T et une matrice inversible P telles que $\mathrm{A}=\mathrm{PTP}^{-1}$. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ les éléments diagonaux de T, c'est à dire les valeurs propres de A. l'égalité $\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{P}^{-1}\exp(\mathrm{T})\mathrm{P}$, implique que

$$\det(\exp(\mathrm{A})) = \det(\exp(\mathrm{T})) = \prod_{k=1}^{n}e^{\lambda_k} = e^{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})}$$

Ainsi

$$\forall\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \det\big(\exp(\mathrm{A})\big) = e^{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})}$$

Autre démonstration

(démesurée)

On considère la fonction de la variable réelle $\varphi: t\mapsto\det(e^{t\mathrm{A}})$. Sachant que, la fonction $t\mapsto e^{t\mathrm{A}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{d}{dt}(e^{t\mathrm{A}}) = \mathrm{A}e^{t\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}$$

que la fonction det est continûment différentiable et pour tout $\mathrm{H}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

$$d(\det)_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(\mathrm{A})\mathrm{H})$$

alors notre fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi'(t) = d(\det)_{e^{t\mathrm{A}}}(\mathrm{A}e^{t\mathrm{A}}) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(e^{t\mathrm{A}})\mathrm{A}e^{t\mathrm{A}}) = \mathrm{Tr}(\det(e^{t\mathrm{A}})e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{A}e^{t\mathrm{A}}) = \varphi(t)\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\varphi(t)=\lambda e^{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})\,t}$. Avec $t=0$, on obtient $\lambda=1$. Ainsi

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \det(e^{t\mathrm{A}}) = e^{t\mathrm{Tr}(\mathrm{A})}$$

Deuxième partie

Vocabulaire

Une matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\mathrm{U}\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{I}_n$ est dite une matrice unitaire (d'où la notation $\mathrm{U}(2,\mathbb{C})$). C'est l'équivalent d'une matrice orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3. • $\mathrm{U}(2,\mathrm{C})$ est bien inclus dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$;
- $\mathrm{I}_2 \in \mathrm{U}(2,\mathbb{C})$;
- pour tout $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{U}(2,\mathbb{C})$, ${}^t(\mathrm{AB})(\overline{\mathrm{AB}}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{AB} \in \mathrm{U}(2,\mathbb{C})$;
- Pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{U}(2,\mathbb{C})$, ${}^t\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_2$, et en inversant cette relation, $\overline{\mathrm{A}}^{-1}({}^t\mathrm{A})^{-1} = \mathrm{I}_2$ ou encore $\overline{\mathrm{A}^{-1}}\,{}^t(\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{I}_2$.

Alors $\mathrm{U}(2,\mathbb{C})$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ et lui un sous groupe de $\mathrm{U}(2,\mathbb{C})$ comme noyau du morphisme de groupes $\mathrm{A} \mapsto \det(\mathrm{A})$ de $(\mathrm{U}(2,\mathbb{C}),.)$ dans $(\mathbb{C}^*,.)$.

$\mathrm{U}(2,\mathbb{C})$ est un groupe et $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{U}(2,\mathbb{C})$.

4. Une matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est un élément de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ si et seulement si

$$ad - bc = 1 \text{ et } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2+|c|^2 & a\overline{b}+c\overline{d} \\ b\overline{a}+d\overline{c} & |b|^2+|d|^2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$$

ce qui est équivalent à

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} |a|^2+|c|^2 = |b|^2+|d|^2 = 1 \\ ad - bc = 1 \\ \overline{c}d + \overline{a}b = 0 \end{cases}$$

En regardant les deux dernières équations comme un système linéaire d'inconnues b et d, le déterminant de ce dernier est $|a|^2+|c|^2 = 1$, son unique solution est donc donnée par: $b = -\overline{c}$ et $d = \overline{a}$.

Réciproquement si $c = -\overline{b}$, $d = \overline{a}$ et $|a|^2+|b|^2$ alors A vérifie le système d'équations (S). Ainsi

les éléments de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ sont ceux de la forme
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \text{ où } (a,b) \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } |a|^2+|b|^2 = 1$$

Autre justification

On **pourrait** aussi raisonner comme suit: $\mathrm{A} \in \mathrm{U}(2,\mathbb{C})$ ssi ses vecteurs colonnes forment une BON de $\mathbb{C}^2$. Ce qui implique déjà que A est de la forme
$$\begin{pmatrix} a & -\lambda\overline{c} \\ c & \lambda\overline{a} \end{pmatrix}$$
avec $|a|^2+|c|^2 = 1$ et $|\lambda| = 1$. Maintenant A est dans $\mathrm{SU}(2,\mathrm{C})$ ssi $\det(\mathrm{A}) = \lambda(|a|^2+|c|^2) = 1$ ie ssi $\lambda = 1$

5.

Soient $M \in SU(2,\mathbb{C})$, $X \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $MX = \lambda X$.

5a. On a $MX = \lambda X$ donc ${}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$ et par suite ${}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M}MX = |\lambda|^2\,{}^t\overline{X}X$. Mais vu que ${}^tM\overline{M} = I_2$ alors $\|X\|^2 = |\lambda|^2\,\|X\|^2$. Comme $X \neq 0$ ceci implique que $|\lambda| = 1$. Ainsi si $M \in SU(2,\mathbb{C})$ alors

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M),\ |\lambda| = 1$$

Précision

Ce qui signifie que l'orthogonal de la droite $\mathbb{C}X$ est stable par l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice M

5b. Soit $Y \in \mathbb{C}^2$. On suppose que ${}^tX\overline{Y} = 0$. ${}^tX\overline{M}\overline{Y} = {}^tX\,{}^t(M^{-1})\overline{Y} = {}^t(M^{-1}X)\overline{Y}$. Mais comme $M^{-1}X = 1/\lambda X$ alors ${}^tX\overline{MY} = 1/\lambda\,{}^tX\overline{Y} = 0$. Ainsi

$$\forall Y \in \mathbb{C}^2,\ {}^tXY = 0 \Longrightarrow {}^tX\overline{M}\overline{Y} = 0$$

6a. Posons

$$X = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} -\overline{c} \\ \overline{a} \end{pmatrix}$$

de telle sorte que $(\mathbb{C}\cdot X)^\perp = \mathbb{C}\cdot Y$. De plus quite à multiplier le vecteur X par $1/\sqrt{{}^t\overline{X}X}$ on peut supposer que $|a|^2 + |c|^2 = 1$.

D'après la question précédente $MY \in (\mathbb{C}\cdot X)^\perp$, donc il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $MY = \mu Y$. (X, Y) est une base (orthonormée) de $\mathbb{C}^2$. La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ dans cette base est

$$P = \begin{pmatrix} a & -\overline{c} \\ c & \overline{a} \end{pmatrix}$$

D'après la question 4 on a bien $P \in SU(2,\mathbb{C})$. Du fait que $\det(M) = \lambda\mu = 1$ on a forcément $\mu = 1/\lambda = \overline{\lambda}$. En posant $\lambda = e^{i\theta}$, on a alors

$$M = P\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Généralisation

Une matrice unitaire A est orthogonalement diagonalisable. Dans le sens qu'elle est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qui est équivalent à la possibilité de former une BON constituée de vecteurs propres de la dite matrice ou encore à l'existence d'une matrice unitaire P et d'une matrice diagonale D telles que $A = P^{-1}DP$

6b. Soient $R, S \in SU(2,\mathbb{C})$

i)⇒ ii) Supposons que $\mathrm{Tr}(R) = \mathrm{Tr}(S)$. Comme on a aussi $\det(R) = \det(S) = 1$ alors $\chi_R = \chi_S = X^2 - \mathrm{Tr}(R)X + 1$. R et S ont donc les mêmes valeurs propres. Selon la question précédente, il existe des matrices $P_1, P_2 \in SU(2,\mathbb{C})$ et un réel θ tels que

$$R = P_1^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P_1 \text{ et } S = P_2^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P_2$$

On a alors $R = P^{-1}SP$ où $P = P_2^{-1}P_1$. P est bien une matrice de $SU(2,\mathbb{C})$ car ce dernier est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

ii)⇒ i) S'il existe $P \in SU(2,\mathbb{C})$ telle que $R = P^{-1}SP$ alors R et S ont même trace puisqu'elles sont semblables.

Ainsi

$$\boxed{\forall (R,S) \in SU(2,\mathbb{C})^2,\ \mathrm{Tr}(R) = \mathrm{Tr}(S) \Longleftrightarrow \exists P \in SU(2,\mathbb{C})\,;\ S = P^{-1}RP}$$

7a. Soient $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(A+B)^l - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}A^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k\right) &= \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} A^j B^{l-j} - \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n} \frac{1}{j!k!} A^j B^k \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \sum_{j+k=l} \binom{j+k}{j} A^j B^k - \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n} \frac{1}{j!k!} A^j B^k \\
&= \sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant n \\ 0\leqslant j+k\leqslant n}} \frac{A^j}{j!}\cdot\frac{B^k}{k!} - \sum_{0\leqslant j,k\leqslant n} \frac{A^j}{j!}\cdot\frac{B^k}{k!} \\
&= -\sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant n \\ j+k>n}} \frac{A^j}{j!}\cdot\frac{B^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left| \sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant n \\ j+k>n}} \frac{A^j}{j!}\cdot\frac{B^k}{k!} \right|\!\right|\!\right| &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant n \\ j+k>n}} \frac{|\!|\!|A|\!|\!|^j}{j!}\cdot\frac{|\!|\!|B|\!|\!|^k}{k!} \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{n} \frac{(|\!|\!|A|\!|\!| + |\!|\!|B|\!|\!|)^l}{l!} - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{|\!|\!|A|\!|\!|^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{|\!|\!|B|\!|\!|^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Ce dernier majorant tend vers 0 puisque pour les nombres réels $|\!|\!|A|\!|\!|$ et $|\!|\!|B|\!|\!|$ on a

$$e^{|\!|\!|A|\!|\!| + |\!|\!|B|\!|\!|} = e^{|\!|\!|A|\!|\!|}\, e^{|\!|\!|B|\!|\!|}$$

Par suite

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(A+B)^l - \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}A^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k\right) \longrightarrow 0$$

On en déduit bien sûr que

$$\boxed{\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)}$$

7b. Soit $A \in \mathscr{L}$ et soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} i\beta & \omega \\ -\overline{\omega} & -i\beta \end{pmatrix}$$

Si $A = 0$, $\exp(A) = I_2$ est bien dans $SU(2, \mathbb{C})$.

Si $A \neq 0$, son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 + \beta^2 + |\omega|^2$. Elle admet donc comme valeurs propres, forcément distinctes, $i\alpha$ et $-i\alpha$ où $\alpha = \sqrt{\beta^2 + |\omega|^2}$. Elle est donc diagonalisable. Soient U et V des vecteurs propres unitaires de A associés respectivement à $i\alpha$ et à $-i\alpha$. L'égalité $\langle AU, V\rangle = \langle U, {}^t\overline{A}V\rangle = -\langle U, AV\rangle$ donne $-i\alpha\langle U, V\rangle = i\alpha\langle U, V\rangle$, soit $\langle U, V\rangle = 0$. La matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ dans la base (U, V) vérifie alors

$$ {}^t P\overline{P} = \begin{pmatrix} {}^tU\overline{U} & {}^tU\overline{V} \\ {}^tV\overline{U} & {}^tV\overline{V} \end{pmatrix} = I_2 \tag{1}$$

Maintenant si $d = \det(A)$ alors grâce à (1), $|d|^2 = 1$. Donc si $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$ alors

$$\det_{\mathscr{E}}\left(U, \overline{d}V\right) = \overline{d}\det(P) = |d|^2 = 1$$

Quite donc à remplacer le vecteur V par $\overline{d}V$, ce qui n'empêchera pas P de vérifier la relation (1), on peut supposer que $\det P = 1$. On aura ainsi $P \in SU(2, \mathbb{C})$ et

$$A = P\begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix}P^{-1}$$

Par suite

$$\boxed{\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}P^{-1}} \tag{2}$$

Alors $\exp(A) \in SU(2, \mathbb{C})$. Ainsi l'image de $\mathscr{L}$ par l'apllication exp est incluse dans $SU(2, \mathbb{C})$.

7c. Selon la question *6a*, si $M \in SU(2, \mathbb{C})$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $P \in SU(2, C)$ tels que

$$M = P^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}P$$

En posant $A = P\mathrm{diag}(i\theta, -i\theta)P^{-1}$, on aura $M = \exp(A)$ et $A \in \mathscr{L}$. D'où la surjectivité de l'application $\exp : \mathscr{L} \longrightarrow SU(2, \mathbb{C})$.

7d. Les deux matrices distinctes de $\mathscr{L}$, 0 et $\mathrm{diag}(2i\pi, -2i\pi)$ ont toutes les deux I_2 comme exponentielle. L'application $\exp : \mathscr{L} \longrightarrow SU(2, \mathbb{C})$ n'est donc pas injective.

Précision

La condition ${}^t\overline{A} = -A$ exprimerait, pour une matrice complexe, ce qui est l'équivalent d'une matrice réelle antisymétrique. Noter en outre qu'une matrice carrée antisymétrique réelle à des coefficients diagonaux nuls et donc une trace nulle, et donc finalement un élément de $\mathscr{L}$

Généralisation

Une matrice antihermitienne est orthogonalement diagonalisable ! En fait, on démontre que toute matrice carrée complexe A telle que ${}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}$ (ce qui inclut les matrices unitaires, hermitiennes et antihermitiennes) est orthogonalement diagonalisable

Extension

Pour les matrices réelles, on montre que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est une matrice orthogonale positive (ie de déterminant égal à 1)

8.

G est un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ *qui contient au moins un élément distinct de* I_2 *et de* $-\mathrm{I}_2$ *et tel que*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}),\ \forall g \in \mathrm{G},\ \mathrm{P}^{-1}g\mathrm{P} \in \mathrm{G} \tag{3}$$

Vocabulaire

la condition (3) s'exprime en disant que G est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$

8a. G contient au moins un élément de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ distinct de I_2 et de $-\mathrm{I}_2$. D'après la question 6a cet élément peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}\mathrm{P}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$. On a forcément $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ car sinon on aura $\mathrm{M} = \mathrm{I}_2$ ou $\mathrm{M} = -\mathrm{I}_2$. Par définition de G on a alors

$$\mathrm{PMP}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix} \in \mathrm{G}$$

8b. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ et remarquons que $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ADA}^{-1}\mathrm{D}^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & -be^{2i\theta} \\ \overline{b}e^{-2i\theta} & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 e^{-2i\theta} & ab(1-e^{2i\theta}) \\ \overline{ab}(-1+e^{2i\theta}) & |a|^2 + |b|^2 e^{2i\theta} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les coefficients diagonaux de $\mathrm{ADA}^{-1}\mathrm{D}^{-1}$ sont: $|a|^2 + (1-|a|^2)e^{-2i\theta}$ et $|a|^2 + (1-|a|^2)e^{2i\theta}$ en particulier

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ADA}^{-1}\mathrm{D}^{-1}) = 2|a|^2 + 2(1-|a|^2)\cos(2\theta)$$

8c. Posons $\mathrm{T} = \bigcup_{g\in\mathrm{G}}\{\mathrm{Tr}(g)\} = \{\mathrm{Tr}(g) \,/\, g \in \mathrm{G}\}$. Pour tout $a \in [0,1]$, en posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{A} \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{ADA}^{-1}\mathrm{D}^{-1}) = 2a^2 + 2(1-a^2)\cos(2\theta)$. Or du fait que G est un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ vérifiant la condition (3) et sachant que $\mathrm{D} \in \mathrm{G}$ alors $(\mathrm{ADA}^{-1})\mathrm{D}^{-1} \in \mathrm{G}$. On a donc pour tout $t \in [0,1]$, $2t+2(1-t)\cos(2\theta) \in \mathrm{T}$. Ce qui revient à dire que le segment $[2\cos(2\theta), 2]$ est contenu dans T. Comme $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ alors $\cos(2\theta) < 1$. En posant $\delta = 2 - 2\cos(2\theta)$ on aura $\delta > 0$ et $[2-\delta, 2] \subset \mathrm{T}$.

9. Remarquons que pour toute matrice $M \in SU(2,\mathbb{C})$, si $\mathrm{Tr}(M) \in T$ alors $M \in G$. En effet si $\mathrm{Tr}(M) \in T$ alors il existe $B \in G$ tel que $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(M)$. D'après la question 6b il existe $P \in SU(2,\mathbb{C})$ tel que $M = P^{-1}BP$. Ce qui implique , d'après la propriété (3 - p. précédente), que $M \in G$.

Maintenant d'après la question précédente $[2\cos(2\theta), 2] \subset T$ donc

$$\forall \alpha \in [0,\theta],\ D_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \in G$$

car si $\alpha \in [0,\theta]$ alors $\mathrm{Tr}(D_\alpha) = 2\cos(\alpha) \in [2\cos(\theta), 2]$.

Soit alors un réel φ quelconque. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in [0,\theta[$ tels que $\varphi = n\theta + \alpha$, et on a alors

$$D_\varphi = D_{\alpha+n\theta} = D_\alpha D_\theta^n = D_\alpha D^n$$

comme G est un sous-groupe de $SU(2,\mathbb{C})$ et que $D_\alpha \in G$ et $D \in G$ alors $D_\varphi \in G$, ceci pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$. On en déduit que $[-2,2] \subset T$. Comme pour tout $M \in SU(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(M) \in [-2,2]$ alors tout élément de $SU(2,\mathbb{C})$ est un élément de G. Ainsi

$$\boxed{G = SU(2,\mathbb{C})}$$

On peut supposer que $\theta \in]-\pi,\pi]$, et même que $\theta \in [0,\pi]$ quite à remplacer D par D^{-1}.

Vocabulaire

Un groupe simple est un groupe dont les seuls sous-groupes distingués sont ses sous-groupes triviaux ($\{1_G\}$ et G)

Troisième partie

$\mathscr{E}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et e, f, g des endomorphismes non nuls de $\mathscr{E}$ tels que

$$[e,f] = -2g\ ,\ [f,g] = -2e\ ;\ [g,e] = -2f$$

On pose $w = f - ig$ et $z = f + ig$.

10. $e\circ z - z\circ e = [e, f+ig] = [e,f] + i[e,g] = -2g + 2if = 2iz$

$e\circ w - w\circ e = [e, f-ig] = [e,f] - i[e,g] = -2g - 2if = -2iw$

$z\circ w - w\circ z = [f+ig, f-ig] = -i[f,g] + i[g,f] = -2i[f,g] = 4ie$

$$\boxed{e\circ z - z\circ e = 2iz\ ,\ e\circ w - w\circ e = -2iw\ ,\ z\circ w - w\circ z = 4ie}$$

Propriété

l'application $(u,v) \longmapsto [u,v]$ de $\mathscr{L}(E)^2$ dans $\mathscr{L}(E)$ est bilinéaire antisymetrique

11. Soit v un vecteur propre de e associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

$e\circ z - z\circ e = 2iz$ donc $e\circ z = z\circ(e + 2i\,\mathbf{id})$ et par recurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ e\circ z^k = z^k \circ (e + 2ik\,\mathbf{id})$$

en appliquant au vecteur v on obtient, $e(z^k(v)) = z^k\big((\lambda + 2ik)v\big) = (\lambda + 2ik)z^k(v)$

Autre justification

la relation $e \circ z - z \circ e = 2iz$ implique que $\operatorname{Ker} z$ est stable par e. En outre $\operatorname{Ker} z$ ne peut être nul car sinon on aurait $z^{-1} \circ e \circ z = e + 2i\,\mathbf{id}$ ce qui impliquerait que $\operatorname{Tr}(e) = \operatorname{Tr}(e + 2i\,\mathbf{id}) = \operatorname{Tr}(e) + 2i \dim E$ soit $\dim E = 0$. Il suffit alors de prendre un vecteur propre v_0 de l'endomorphisme induit par e sur $\operatorname{Ker} z$

$$\boxed{e(z^k(v)) = \mu_k z^k(v) \quad \text{où } \mu_k = \lambda + 2ik}$$

12. Les vecteurs $v^k(z)$ ne peuvent être tous non nuls, sinon les nombres $\lambda + 2ik$ seraient tous des valeurs propres de e, ce qui est impossible puisque e admet un nombre fini de valeurs propres. Soit donc $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, z^k(v) = 0_E\}$.

Le vecteur $v_0 = z^{p-1}(v)$ (on a bien $p \geqslant 1$) est non nul et il vérifie $z(v_0) = 0_E$ et $e(v_0) = \lambda_0 v_0$ où $\lambda_0 = \lambda + 2i(p-1)$.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = w^k(v_0)$.

On a $e \circ w = w \circ (e - 2i\,\mathbf{id})$ ce qui donne de même que pour z

$$\forall k \in \mathbb{N},\ e \circ w^k = w^k \circ (e - 2ik\,\mathbf{id})$$

Par suite $e(v_k) = e \circ w^k(v_0) = w^k \circ (e - 2ik\,\mathbf{id})(v_0) = (\lambda_0 - 2ik) w^k(v_0)$, soit

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik) v_k \qquad (4)}$$

Ensuite, puisque $z \circ w - w \circ z = 4ie$ et $z(v_0) = 0_E$ alors $z(v_1) = 4i\lambda_0 v_0$, et par récurrence

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ z(v_k) = 4i(k\lambda_0 - ik(k-1)) v_{k-1} \qquad (5)}$$

En effet supposons que la relation soit vraie à un ordre $k \in \mathbb{N}^*$, on aura alors

$$\begin{aligned} z(v_{k+1}) &= w(z(v_k)) + 4ie(v_k) = 4i(k\lambda_0 - ik(k-1)) v_k + 4i(\lambda_0 - 2ik) v_k \\ &= 4i\big((k+1)\lambda_0 - i(k+1)k\big) v_k \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

14. Par un même raisonnement que dans la question 12, les vecteurs v_k ne peuvent être tous non nuls à cause de la relation (4). Sachant que $v_0 \neq 0_E$ et que dès que pour un entier q, $v_q = 0_E$ alors pour tout $k \geqslant q$, $v_k = w^{k-q}(v_q) = 0_E$, on peut considérer l'entier $n = \max\{k \in \mathbb{N} \,/\, v_k \neq 0_E\}$. On a bien $v_{n+1} = 0_E$ et si $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires tels que

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_E$$

en appliquant successivement les endomorphismes $w^n, w^{n-1}, \dots, w$ on démontre que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. La famille $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ est donc libre.

15. $v_{n+1} = 0_{\mathrm{E}}$ et $v_n \neq 0_{\mathrm{E}}$ donc d'après (5 - p. précédente), $(n+1)\lambda_0 - in(n+1) = 0$ soit

$$\boxed{\lambda_0 = in}$$

Les relations (4 - p. précédente) et (5 - p. précédente) deviennent alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\boxed{e(v_k) = i(n-2k)v_k \text{ et } z(v_k) = 4k(k-1-n)v_{k-1}}$$

et pour $k = 0$: $e(v_0) = \lambda_0 v_0 = inv_0$ et $z(v_0) = 0_{\mathrm{E}}$.