Prob. de synthèse et extraits de DS
Fiche 1.
CORRECTION

Exo 1 : Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P \in F \Leftrightarrow (P(0)=0$ et $P(1)=0)$.

1/a°) F sev de E, en effet :

i) Notons θ le polynôme nul.

On a $\theta(0)=0$ et $\theta(1)=0$, d'où $\boxed{\theta \in F}$

ii) Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. M.que $\lambda P+Q \in F$:

On a $(\lambda P+Q)(1) = \lambda \underbrace{P(1)}_{=0} + \underbrace{Q(1)}_{=0} = 0$. De même $(\lambda P+Q)(0)=0$

D'autre part, $\lambda P+Q \in \mathbb{R}_3[X]$.

D'où $(\lambda P+Q) \in F$.

Conclusion : F sev de E

---

b°) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a :

$P \in F \Leftrightarrow P(0)=0$ et $P(1)=0$

$\Leftrightarrow X(X-1) / P$

$\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \,/\, P = X(X-1)(aX+b)$

$\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} \,/\, P = aX^2(X-1)+bX(X-1)$

D'où $F = \{aX^2(X-1)+bX(X-1) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow F = \text{Vect}\left(X^2(X-1) \,;\, X(X-1)\right)$

Ainsi $B=(X(X-1), X^2(X-1))$ est une famille génératrice de F.

Or B est libre puisqu'elle est échelonnée de degrés, alors B est une base de F.

$\boxed{C/C : B=(X(X-1), X^2(X-1)) \text{ une base de } F \text{ et } \dim F = 2}$

---

c°) $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$; en effet

i) $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$; en effet :

Soit $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$. Mque $P = 0$.

On a $P \in \mathbb{R}_1[X]$, donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = aX + b$

et $P \in F \Rightarrow P(0) = 0$ et $P(1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$ (car $P(X) = aX + b$)

$\Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

D'où $\boxed{P = 0}$ (car $P = aX + b$)

ii) $F \oplus \mathbb{R}_1[X] = E$; en effet :

« On est en dimension finie, alors pensons à utiliser la dimension ! »

On a $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$, donc $\dim(F \oplus \mathbb{R}_1[X]) = \underbrace{\dim F}_{=2} + \underbrace{\dim \mathbb{R}_1[X]}_{=2} = 4$

$\Rightarrow F \oplus \mathbb{R}_1[X]$ est un sev de E et $\dim(F \oplus \mathbb{R}_1[X]) = \dim E$

D'où $\boxed{F \oplus \mathbb{R}_1[X] = E}$

2) $f : E = \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f : P \mapsto f(P) = P(2)$.

a) i) $f \in E^*$ (càd f forme linéaire sur E) ; en effet : (En bref)

$f(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(2) = \alpha \underbrace{P(2)}_{=f(P)} + \underbrace{Q(2)}_{=f(Q)} = \alpha f(P) + f(Q)$.

ii) $\dim H = ?$

f est une forme linéaire sur E, et elle est NON NULLE, car

$f(X+3) \underset{\text{par exemple}}{=} 2 + 3 = 5 \neq 0$.

D'où $H = \mathrm{Ker}(f)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

$\Rightarrow H$ est un hyperplan de E. D'où $\boxed{\dim(H) = \dim(E) - 1 = 3}$

b) $E \neq F \oplus H$; en effet : ; Raisonnons par l'absurde et supposons

que $E = F \oplus H$, alors $\dim E = \dim F + \dim H$

$\Rightarrow 4 = 2 + 3$, ce qui est absurde.

D'où $E \neq F \oplus H$.

C°) Soit $P \in E$ $(= \mathbb{R}_3[X])$, on a :

$P \in F \cap H \Leftrightarrow P \in F$ et $P \in H$

$\Leftrightarrow P(0) = 0$ et $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$

$\Leftrightarrow X(X-1)(X-2) \,/\, P$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, P = \lambda X(X-1)(X-2)$ (car $P \in \mathbb{R}_3[X]$)

D'où $F \cap H = \{ \lambda X(X-1)(X-2) \,/\, \lambda \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow B' = \big(X(X-1)(X-2)\big)$ est une famille génératrice de $F \cap H$.

et B' est en plus libre car $X(X-1)(X-2) \neq 0$

D'où B' est Une base de $F \cap H$

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

1°) H_n sev de E : ressemble à Exercice 1 : 1°/ a°/

2°) $P_n = P_2(X) \cdot Q(X) + (\alpha X + \beta)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (c'est la div. euclid. de P_n par P_2)

$\Rightarrow P_n(X) = (X-1)^2 Q(X) + (\alpha X + \beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} P_n(1) = \alpha + \beta \\ P_n'(1) = \alpha \end{cases}$, D'où $\begin{cases} \alpha + \beta = 2-n \\ \alpha = 0 \end{cases}$; càd $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2-n \end{cases}$

Donc le polynôme constant $(2-n)$ est le reste de la division euclidienne de P_n par P_2.

3°) a) $E = H_n \oplus \mathbb{R}_1[X]$; en effet :

i) $H_n \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0\}$; en effet : (Pareil à Ex1 : 1°/ C°/)

$P \in H_n \cap \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow \begin{cases} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,/\, P(X) = \alpha X + \beta \\ P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$, D'où $\alpha = \beta = 0$ et donc $\boxed{P = 0}$

ii) $E = H_n + \mathbb{R}_1[X]$; en effet.

N.B : On n'utilisera pas la dimension ici, puisqu'une question après demande de déduire $\dim H_n$

Jouons analyse – synthèse :

Soit $P \in E$. M.q. qu'il existe $(Q, R) \in H_n \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P = Q + R$.

Analyse : (En bref)

Supposons l'existence d'un tel couple (Q, R)

$\Rightarrow P = Q + \underbrace{(aX+b)}_{=R}$

$\Rightarrow \begin{cases} P(1) = \underbrace{Q(1)}_{=0} + a + b \\ P'(1) = \underbrace{Q'(1)}_{=0} + a \end{cases}$; $(Q(1) = Q'(1) = 0$ car $Q \in H_n)$

$\Rightarrow \begin{cases} a = P'(1) \\ b = P(1) - P'(1) \end{cases}$.

d'où $\boxed{\begin{aligned} R &= P'(1)X + (P(1) - P'(1)) \\ Q &= P(X) - [P'(1)X + P(1) - P'(1)] \end{aligned}}$

« R et Q sont donc déterminés en fonction de P »

Synthèse : (ou vérification)

Avec R et Q ci-dessus, on a bien que $R \in \mathbb{R}_1[X]$,

et $Q \in H_n$; en effet :

$\longrightarrow Q(1) = P(1) - [P'(1) + P(1) - P'(1)] = 0$

$\longrightarrow Q'(X) = P'(X) - P'(1) \Rightarrow Q'(1) = P'(1) - P'(1) = 0$

et en plus, on a $Q + R = P$ (clair).

C/C : $\boxed{E = H_n \oplus \mathbb{R}_1[X]}$

b°) On a $\underbrace{\dim E}_{=n+1} = \dim(H_n) + \underbrace{\dim(\mathbb{R}_1[X])}_{=2} \Rightarrow \boxed{\dim(H_n) = n-1}$

c°) On a $E = H_n \oplus \mathbb{R}_1[X]$, et pour tout $P \in E$ on a :

$$P = \underbrace{\left(P(X) - \left[P'(1)X + P(1) - P'(1)\right]\right)}_{\in H_n} + \underbrace{\left(P'(1)X + P(1) - P'(1)\right)}_{\in \mathbb{R}_1[X]}$$

D'où $P_{\mathbb{R}_1[X]}(P) = P'(1)X + P(1) - P'(1)$, est la projection de P sur $\mathbb{R}_1[X]$, parallèlement à H_n.

En particulier $\boxed{P_{\mathbb{R}_1[X]}(P_n) = \underbrace{P_n'(1)}_{=0} \cdot X + \underbrace{P_n(1)}_{=2-n} - \underbrace{P_n'(1)}_{=0} = 2-n}$

Autre piste :

$2°/ \Rightarrow P_n = \underbrace{P_2 \cdot Q(X)}_{\substack{=(X-1)^2 Q(X) \\ \in H_n}} + \underbrace{(2-n)}_{\in \mathbb{R}_1[X]}$, d'où $\boxed{P_{\mathbb{R}_1[X]}(P_n) = 2-n}$

4°) a) $P_3 \overset{n=3}{=} \underbrace{(2-n)}_{=P_{\mathbb{R}_1[X]}(P_3)} + \left(P_3 - (2-n)\right) = (-1) + (P_3 + 2) = (-1) + (X^3 - 3X + 2)$

et $2-n = P_{\mathbb{R}_1[X]}(P_3)$ donne que $\underline{P_3 - (2-n) \in H_n = H_3}$.

Ainsi, $\boxed{P_3 = \underbrace{(X^3 - 3X + 2)}_{\in H_3} + \underbrace{(-1)}_{\in \mathbb{R}_1[X]}}$

b°) $P \in H_3 \iff P(1) = P'(1) = 0 \iff (X-1)^2 / P \iff \exists a, b \in \mathbb{R} / P = (aX+b)(X-1)^2$

D'où $H_3 = \mathrm{Vect}\left(X(X-1)^2, (X-1)^2\right)$.

Pour montrer que $\left(X(X-1)^2, (X-1)^3\right)$ est une base de H_3, on montre que :

$$\mathrm{Vect}\left(X(X-1)^2, (X-1)^2\right) = \mathrm{Vect}\left(X(X-1)^2, (X-1)^3\right).$$

Pour cela, et via les deux inclusions, et avec la clef suivante :

« $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset F \iff \forall i = 1, \ldots, p,\ e_i \in F$ »

où F est un sev de E, il suffit de vérifier que :

$$\begin{cases} i)\ (X-1)^2 \in \mathrm{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^3) \\ ii)\ (X-1)^3 \in \mathrm{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^2) \end{cases}$$

On a $X(X-1)^2 = (X-1+1)(X-1)^2 = (X-1)^3 + (X-1)^2$

$\Rightarrow (X-1)^2 = X(X-1)^2 - (X-1)^3 \in \mathrm{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^3)$, d'où i)

et $(X-1)^3 = X(X-1)^2 - (X-1)^2 \in \mathrm{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^2)$; d'où ii)

C/c : $\boxed{H_3 = \mathrm{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^3)}$ et donc $(X(X-1)^2, (X-1)^3)$ est génératrice de H_3, et est libre puisqu'échelonnée de degrés, donc c'est une base de H_3.

4/ c/ D'après a°/, on a $P_3 = \underbrace{(X^3 - 3X + 2)}_{\in H_3} + \underbrace{(-1)}_{\in \mathbb{R}_1[X]}$

et $X^3 - 3X + 2 \in H_3 = \mathrm{Vect}(X(X-1)^2, (X-1)^3)$ implique que :

$X^3 - 3X + 2 = a\,X(X-1)^2 + b(X-1)^3$, où $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X^3 - 3X + 2 = a(X^3 - 2X^2 + X) + b(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$, et puisqu'on a seulement deux inconnues, sans identifier les deux polynômes, et puis on obtient :

On considère par exemple les deux premiers coefficients :

$$\begin{cases} 2 = -b \\ -3 = a + 3b \end{cases}$$

ce qui donne : $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

D'où $\boxed{P_3 = (-1) + 3X(X-1)^2 - 2(X-1)^3}$

C/c : les coordonnées de P_3 dans cette base $(1, X, X(X-1)^2, (X-1)^3)$ sont : $(-1, 0, 3, -2)$

Exercice 3 :

1°) dim $F = 3$: (P_1, P_2, P_3) génératrice de F et libre, puisqu'échelonnée de degrés.

2/a°/ i) <u>G sev</u> : (OK) ...

ii) $G = \{ (X^2+1)(aX^2+bX+c) / a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$B = (X^2+1, X(X^2+1), X^2(X^2+1))$ base de G (comme en 1°)

b°) $F = \text{Vect}\left(1+X^2, X(1+X^2), (1+X^2)^2\right)$

$G = \text{Vect}\left(1+X^2, X(1+X^2), X^2(1+X^2)\right)$

Pour M. que $F = G$, on montre, comme dans l'Exercice 2/4/b°) que : $X^2(1+X^2) \in F$ et $(1+X^2)^2 \in G$:

On a $X^2(1+X^2) = \left((X^2+1)-1\right)(1+X^2) = (1+X^2)^2 - (1+X^2) \in F$

et On a $(1+X^2)^2 = (1+X^2) + X^2(1+X^2) \in G$

D'où $F = G$

c°) En effectuant la division euclidienne de P par X^2+1 on trouve le reste nul ; et : $\boxed{P = (X^2+1)(X^2-X+1)}$

$\Rightarrow \boxed{P \in G}$ ((X^2+1) divise P)

$\rightarrow$ <u>D'autre part</u>, $P = (X^2+1) - X(X^2+1) + X^2(X^2+1)$ (ou voir (P_1, P_2, P_3))

$$= \underbrace{(X^2+1)}_{= P_1} - \underbrace{X(X^2+1)}_{= P_2} + (X^2+1-1)(X^2+1)$$

$$= P_1 - P_2 + \underbrace{(X^2+1)^2}_{= P_3} - \underbrace{(X^2+1)}_{P_1} = -P_2 + P_3$$

Les coord. de P dans la base (P_1, P_2, P_3) sont donc $(0, -1, 1)$

« Ou bien : $P = (X^2+1)(X^2-X+1) = \underbrace{(X^2+1)\cdot(X^2+1)}_{= P_3} - \underbrace{(X^2+1)\cdot X}_{= P_2} = P_3 - P_2$ »

3/a°/ $H = \text{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3)$.

$\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est bien une famille génératrice de H.

M. que $\mathcal{B}$ est libre : (En bref)

$$\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0 \Rightarrow \alpha(X^2-1) + \beta(X^2-X) + \gamma(X^2-X-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -\beta-\gamma = 0 \\ -\alpha \quad -\gamma = 0 \end{cases} \text{ ; (système à résoudre)}$$

(Par exemple) $\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha \quad = 0 \\ -\alpha \quad -\gamma = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\Rightarrow \alpha = 0,\ \gamma = 0,\ \beta = 0$$

D'où $\mathcal{B}$ base de H,

$$\Rightarrow \boxed{\dim H = 3} \ (= \text{card}(\mathcal{B}))$$

3/b°/ $\dim(F+H) = 5$, en effet

On a $\begin{cases} F = \text{Vect}(X^2-1, X^2-X, X^2-X-1) \\ G = \text{Vect}(X^2+1, X(X^2+1), (X^2+1)^2) \end{cases}$

$\Rightarrow (X^2+1, X(X^2+1), (X^2+1)^2)$ est une famille de vecteurs du sev $F+H$

((On rappelle que $F \subset F+H$ et $H \subset F+H$))

En plus : On a (X^2-1) et $(X^2-X) \in F+H \Rightarrow \underbrace{(X^2-1)-(X^2-X)}_{= X-1} \in F+H$

et On a (X^2-X) et $(X^2-X-1) \in F \subset (F+H)$

$$\Rightarrow \underbrace{(X^2-X)-(X^2-X-1)}_{= 1} \in F+H$$

D'où $(1, X-1, X^2+1, X(X^2+1), (X^2+1)^2)$ est une famille de $F+H$

$\Rightarrow \text{Vect}(1, X-1, X^2+1, X(X^2+1), (X^2+1)^2) \subset (F+H)$ (*)

et cette famille est libre (car échelonnée de degrés), et est de cardinal égal à $\dim(\mathbb{R}_4[X])$, d'où c'est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, et (*) $\Rightarrow \boxed{F+H = \mathbb{R}_4[X]}$; Enfin, $\boxed{\dim(F+H) = 5}$

$\dim(F) = ?$:

On a $\underbrace{\dim(F+H)}_{=5} = \underbrace{\dim F}_{=3} + \underbrace{\dim H}_{=3} - \dim(F\cap H) \Rightarrow \boxed{\dim(F\cap H) = 1}$

4) a°) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on a :

$P \in K \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)^3 / P$

$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} / P = (X-1)^3 (aX+b)$.

Rappel : $P(a) = \dots = P^{(m)}(a) = 0 \Leftrightarrow (X-a)^{m+1} / P$

D'où $K = \{(X-1)^3(aX+b) / a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((X-1)^3, X(X-1)^3)$, qui est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$.

$((X-1)^3, X(X-1)^3)$ est génératrice de K, et est aussi libre (encore échelonnée)

$\Rightarrow$ base de K, et donc $\boxed{\dim K = 2}$

4/b°/ $\mathbb{R}_4[X] = G \oplus K$; en effet :

i) $G \cap K = \{0\}$; en effet :

Soit $P \in G \cap K$, M.q. $P = 0$:

On a $P \in G = F \Rightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \boxed{P = \alpha(X^2+1) + \beta X(X^2+1) + \gamma(X^2+1)^2}$ (Σ)

et $P \in K \Leftrightarrow P(1) = 0, P'(1) = 0$ et $P''(1) = 0$ (Σ)'

Après calculs, (Σ)' devient (sauf erreurs de calculs) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 8\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2\beta + 6\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

alors $\boxed{\gamma = 0}$, puis on remonte, $\boxed{\beta = 0}$, et on remonte encore, $\boxed{\alpha = 0}$
et l'égalité (Σ) ci-dessus donne que : $\boxed{P = 0}$

ii) On a $G \cap K = \{0\}$, alors $\dim(G \oplus K) = \underbrace{\dim G}_{3} + \underbrace{\dim K}_{2} = 5$

$$\Rightarrow \dim(G \oplus K) = \dim \mathbb{R}_4[X]$$

D'où $\boxed{G \oplus K = \mathbb{R}_4[X]}$

Fin et bon Courage