

Séries dans un evn de dimension finie

Familles sommables

I) Séries dans un evn de dimension finie.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un evn de dimension finie

1) Généralités

La notion d'une série à valeurs dans un evn, et ses propriétés sont analogues à celles d'une série réelle ou complexe vues au Sup.

Dans la suite, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera une suite à valeurs dans l'evn E .

Déf 1

La série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge si et ssi la suite vectorielle $(S_n)_{n \geq 0}$ converge ;
où

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

NB

1) En cas de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} U_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ s'appelle la somme de la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

2) Différencier entre $\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

3) On définit de même la série $\sum_{n \geq N} U_n$, où $N \in \mathbb{N}$:

La série $\sum_{n \geq N} u_n$ converge si et seulement si la suite vectorielle $(S_n)_{n \geq N}$ converge ;
où

$$\forall n \geq N, S_n = \sum_{k=N}^n u_k$$

$$4) \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \geq N} u_n \text{ converge}$$

En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{N-1} u_n$$

Prop 2

$$1) \sum_n u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_n u_n = 0$$

$$2) \left(u_n \not\rightarrow 0 \right)_{n \rightarrow +\infty} \Rightarrow \sum_n u_n \text{ diverge}$$

Démo Parallèle aux séries réelles.

NB

$$1) \lim u_n = 0 \not\Rightarrow \sum u_n \text{ cv (C-exemple : } \sum \frac{1}{n})$$

2) Si $\sum_n u_n$ diverge parce que $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. (Dio G)

Par exemple :

$$\left| \begin{array}{l} \sum (1 + \frac{1}{n})^n \text{ Dio G} \\ \sum \frac{1}{n} \text{ diverge et pas grossièrement} \end{array} \right.$$

Prop 3

$$(\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge}) \Leftrightarrow (\text{La série télescopique } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge})$$

ex-application (classique)

$$L_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer la suite $(L_n)_{n \geq 1}$ converge.

Solution

On a :

$$(La\ suite\ (L_n)_{n \geq 1}\ converge) \iff (La\ s\erie\ \sum_{n \geq 1} (U_{n+1} - U_n)\ converge)$$

Il s'agit alors de montrer que la s\erie $\sum_{n \geq 1} (U_{n+1} - U_n)$ converge.

Pour $n \geq 1$. On a :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{(n+1)-1}{n+1}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Or } \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\text{Alors } \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$ 1^{er} terme

$$\text{Donc : } (U_{n+1} - U_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\text{On } \sum_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \right) \text{ CR (Riemann : } d = 2 > 1)$$

$$\text{Donc } \sum_n (U_{n+1} - U_n) \text{ converge}$$

CQFD

2) Lim avec les séries composantes

ICI

→ $B = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E .

→ Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{i=1}^d U_n^i e_i = U_n^1 e_1 + \dots + U_n^d e_d$

→ Les suites $(U_n^i)_n$ sont les suites composantes de (U_n) dans B .

→ Les séries $\sum_n U_n^i$ sont les séries composantes de $\sum_n U_n$ dans B .

Prop

$$1) \sum U_n \text{ converge} \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq d, \sum_n U_n^i \text{ converge})$$

2) Quel le cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^i \right) e_i = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^1 \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^d \right) e_d$$

Démo

$$\text{On a } U_n = \sum_{i=1}^d U_n^i e_i.$$

$$\text{On pose : } S_n = \sum_{k=0}^n U_k. \text{ On a :}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=1}^d U_k^i e_i \right) = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=0}^n U_k^i \right) e_i$$

$$1) \quad \sum U_n \text{ CV} \Leftrightarrow (S_n)_n \text{ CV}$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq d, \text{ la suite } \left(\sum_{k=0}^n U_k^i \right)_n \text{ CV}$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq d, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} U_n^i \text{ converge}$$

□

$$2) \text{ Supp que } \sum U_n \text{ converge.}$$

$$\text{On a : } S_n = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=0}^n U_k^i \right) e_i, \text{ alors :}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$= \sum_{i=1}^d \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n U_k^i \right) \right) e_i$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n^i \right) e_i$$

Remarque : Dans l'espace $\mathbb{C}$ muni de sa base canonique $(1, i)$
On retrouve le résultat vu au chap suivant :

Soit $\sum_n u_n$ une série complexe, on a :

1) $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow (\sum \operatorname{Re}(u_n) \text{ et } \sum \operatorname{Im}(u_n) \text{ convergent})$

2) En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) \right) + i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n) \right)$$

3) Séries absolument convergentes (ACV)

Déf 1

$$\sum_n u_n \text{ est ACV} \Leftrightarrow \sum_n \|u_n\| \text{ CV}$$

Prop 2

1) $\sum u_n \text{ ACV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}$

2) Si $\sum u_n$ est ACV, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

C'est l'inégalité triangulaire

Attention

La réciproque est en général fautive.

Contre-exemple (à savoir)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ CV mais n'est pas ACV.}$$

Démo

1) Supp que $(\sum u_n)$ ACV et M que $(\sum u_n)$ CV :

$$\text{Notons } u_n = \sum_{i=1}^d u_n^i e_i.$$

Il suffit de m que: $(\forall 1 \leq i \leq d, \sum_n u_n^i \text{ CV})$

Et il suffit pour cela de montrer que:

$(\forall 1 \leq i \leq d, \text{ la série } \sum_n u_n^i \text{ est ACV})$

Car on est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où l'on avait vu en Sup que:

$$\langle \text{ACV} \Rightarrow \text{CV} \rangle.$$

Considérons la norme suivante:

$$\text{Pour } x = \sum_{i=1}^d x_i e_i, \|x\| = \max_{i=1}^d |x_i|$$

Soit $i \in [1, d]$. M que la série $\sum_n u_n^i$ ACV :

$$\text{On a } \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n^i| \leq \|u_n\| \\ \sum_n \|u_n\| \text{ converge} \end{array} \right.$$

D'où $\sum_n |u_n^i| \text{ CV}$, par comparaison des séries à termes positifs. □

2) Supp que $\sum_n u_n \text{ ACV}$. Montrons que:

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. En posant $S_p = \sum_{k=0}^p u_k$, on a:

$$\|S_p\| = \left\| \sum_{k=0}^p u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^p \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$$

$$\text{D'où : } (\forall p \in \mathbb{N}, \|S_p\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|U_k\|)$$

Par passage à la limite " $p \rightarrow +\infty$ ", on a :

$$\| \sum_{k=0}^{+\infty} U_k \| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|U_k\|$$

CQFD

4) Algèbre normée

Déf 1

Soit $(A, +, \cdot, x)$ une algèbre.

Si $(A, \|\cdot\|)$ est un evn vérifiant :

$$\forall x, y \in A, \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

On dit que A est une algèbre normée.

Prop 2

Si A est une algèbre normée, on a :

$$\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \|a^n\| \leq \|a\|^n$$

Démo :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Prop 3

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

Si $a \in A$ avec $\|a\| < 1$, alors :

1) La série $\sum_{n \geq 0} a^n$ est ACV.

2) $(1-a)$ est inversible et on a :

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

Démo :

Soit $a \in A$ avec $\|a\| < 1$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} a^n$ est ACV; en effet :

$$\text{On a : } (\forall n \in \mathbb{N}, \|a^n\| \leq \|a\|^n)$$

et la série $\sum_n \|a\|^n$ converge, comme série géométrique puisque $\|a\| < 1$.

Alors la série $\sum_n \|a^n\|$ CV, par comparaison des séries positives.

Càd que la série $\sum_n a^n$ est ACV. $\square$

2) $(1-a)$ est inversible et on a :

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

En effet :

$$\text{Il s'agit de montrer que : } \begin{cases} (1-a) \times \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1 \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) \times (1-a) = 1 \end{cases}$$

i) Montrer que $(1-a) \times \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1$:

$$\text{On a } \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n ; \text{ où } S_n = \sum_{k=0}^n a^k.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, (1-a) \times S_n &= (1-a) \sum_{k=0}^n a^k \\ &= \sum_{k=0}^n (1-a) a^k \\ &= \sum_{k=0}^n (a^k - a^{k+1}) \end{aligned}$$

$$= a^0 - a^{n+1} \text{ (Télescope)}$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (1-a) \times S_n = 1 - a^{n+1}}$ ★

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(1-a) \times S_n}_{f(S_n)} = (1-a) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right)$
 $\downarrow$
 $f(S_n)$; où $f: x \mapsto (1-a)x$

Car f est continue sur A , puisque linéaire et A de dimension finie.
 et vu la caractérisation séquentielle de la continuité de f en $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right) \in A$.

et on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1} = 0$, car $\sum_n a^n$ converge.

Par passage à la limite en ★, on tire que :

$$\boxed{(1-a) \times \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1}$$

ii) Pour $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \times (1-a) = 1$: Pareil.

Lemme :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est ACV (donc CV).

2) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Démo

Vue au TD.

Prop et déf 3

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

Soit $a \in A$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ est ACV.

2) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ se note $\exp(a)$ et s'appelle exponentielle de a .

Démo

1) Soit $a \in A$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{a^n}{n!} \right\| = \frac{1}{n!} \cdot \|a^n\| \leq \frac{\|a\|^n}{n!}$$

et on a $\sum_n \frac{\|a\|^n}{n!}$ CV d'après le lemme

Alors $\sum \left\| \frac{a^n}{n!} \right\|$ CV, par comparaison des séries positives.

Cad que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ est ACV.

□

NB

1) $\forall a \in A, \exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ (définie pour tout $a \in A$)

2) On note aussi: e^a

Prop 4

Soit A une algèbre normée de dimension finie. On a :

$$1) \exp(0) = 1_A.$$

$$2) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \exp(\lambda \cdot 1_A) = e^\lambda \cdot 1_A$$

$$3) \text{ Si } a \text{ et } b \in A \text{ avec } ab = ba, \text{ alors}$$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$4) \forall a \in A, \exp(a) \text{ est inversible et on a : } (\exp(a))^{-1} = \exp(-a)$$

Cas particulier important : L'algèbre normée $M_d(\mathbb{K})$

$$1) \forall A \in M_d(\mathbb{K}), \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

$$2) \exp(0_d) = I_d$$

$$3) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \exp(\lambda \cdot I_d) = e^\lambda \cdot I_d$$

$$4) \text{ Si } A \text{ et } B \in M_d(\mathbb{K}), \text{ avec } AB = BA, \text{ on a :}$$

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

$$5) \forall A \in M_d(\mathbb{K}), \exp(A) \text{ est une matrice inversible, et on a :}$$

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

Démo

$$1) \forall A \in M_d(\mathbb{R}), \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

C'est la définition de $\exp(A)$.

$$2) \exp(O_d) = I_d$$

$$\begin{aligned} \exp(O) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{O^n}{n!} \\ &= \underbrace{\frac{O^0}{0!}}_{=I_d} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{O^n}{n!}}_{=0} \\ &= I_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall B \in M_d(\mathbb{K}) \\ &B^0 = I_d \\ &O^0 = I_d \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$

$$\exp(O_d) = I_d$$

$$3) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \exp(\lambda \cdot I_d) = e^\lambda \cdot I_d$$

$$\begin{aligned} \exp(\lambda \cdot I_d) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \cdot I_d)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^n}{n!} \cdot I_d \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) \cdot I_d \\ &= e^\lambda \cdot I_d \end{aligned}$$

4) Voir plus tard.

5) $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est une matrice *inversible*, et on a:

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

Il s'agit de vérifier que: $\exp(A) \times \exp(-A) = I_d$

On a:

$$\begin{aligned} \exp(A) \times \exp(-A) &= \exp(A + (-A)) \quad (\text{car } A \text{ et } (-A) \text{ commutent}) \\ &= \exp(O_d) \\ &= I_d \end{aligned}$$

□

II) Familles sommables

Jusqu'à la fin du chapitre, toutes les familles $(a_i)_{i \in I}$ sont des familles de nombres réels ou complexes.

1) Ensembles dénombrables (Rappels)

- 1) D est dit dénombrable si et si D est en bijection avec $\mathbb{N}$.
- 2) D est dit au plus dénombrable si et si D est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
- 3) D au plus dénombrable $\Leftrightarrow (D$ fini ou dénombrable)
- 4) Toute réunion d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.
- 5) Exemples d'ensembles dénombrables :
 - $\rightarrow \mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*$
 - $\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
 - $\rightarrow \{n\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \{n\}$; où $n \in \mathbb{N}$ fixé.

2) Familles sommables positives

Déf 1

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

- 1) $(a_i)_{i \in I}$ est dite famille sommable si et si l'ensemble suivant est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \sum_{j \in J} a_j \mid J \text{ partie finie de } I \right\}$$

2) $\sum_i (a_i)_{i \in I}$ est sommable, la borne supérieure de l'ensemble

$\left\{ \sum_{j \in J} a_j \mid J \text{ partie finie de } I \right\}$ s'appelle la somme de la famille $(a_i)_{i \in I}$, et se note $\sum_{i \in I} a_i$.

Réflexes

Supp que $(a_i)_{i \in I}$ est une f^{lle} sommable positive, on a :

$$1) \sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{j \in J} a_j \mid J \text{ partie finie de } I \right\}$$

2) $\sum_i J \subset I$ et finie, on a :

$$\sum_{j \in J} a_j \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Convention

$\sum_i (a_i)_{i \in I}$ est une famille positive non sommable, on

conviendrait d'écrire :

$$\sum_{i \in I} a_i = +\infty$$

Propre (Cas d'une famille finie)

$\sum_i (a_i)_{i \in I}$ est une famille positive et finie, alors elle est sommable, et sa somme coïncide avec sa somme finie $\sum_{i \in I} a_i$.

Démo

$\left\{ \sum_{j \in J} a_j \mid J \text{ partie finie de } I \right\}$ possède $\sum_{i \in I} a_i$ comme plus grand élément.

Prop 3 (Critère de comparaison)

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles positives vérifiant:

$$\forall i \in I, a_i \leq b_i$$

1) i) $(b_i)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow (a_i)_{i \in I}$ sommable

ii) Dans ce cas, on a:

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

2) $((a_i)_{i \in I} \text{ n'est pas sommable}) \Rightarrow ((b_i)_{i \in I} \text{ n'est pas sommable})$

Démo

1) $(b_i)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow (a_i)_{i \in I}$ sommable ?

Supp que $(b_i)_{i \in I}$ sommable.

M. que $(a_i)_{i \in I}$ sommable.

Soit J une partie finie de I .

$$\text{On a: } (\forall i \in I, a_i \leq b_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i$$

$$\text{Or } (b_i)_{i \in I} \text{ sommable, alors } \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

$$\text{D'où } \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

Enfin $(a_i)_{i \in I}$ sommable.

$$\text{Enfin } \sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i / J \subset I, J \text{ finie} \right\} \leq \sum_{i \in I} b_i$$

□

$$2) \left((a_i)_{i \in I} \text{ n'est pas sommable} \right) \Rightarrow \left((b_i)_{i \in I} \text{ n'est pas sommable} \right)$$

C'est la **contraposée** de :

$$(b_i)_{i \in I} \text{ sommable} \Rightarrow (a_i)_{i \in I} \text{ sommable}$$

□

Prop 4 (lien avec les séries)

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille **positive**. On a

$$1) \quad (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ converge}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Démo

On a de même :

Prop 5

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille positive. On a

$$1) (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n \geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ converge}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Corollaire 6

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$$1) (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Démo

$$1) \sigma = \text{id} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} = I \text{ bijective.}$$

D'où :

$$(a_n)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \hookrightarrow I}} \text{ sommable} \iff \sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ CV}$$

$$\iff \sum_{n \geq 0} a_n \text{ CV.}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \quad (\sigma = \text{id})$$

$\downarrow$
 $= I$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$



Corollaire 7

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série à termes *positifs*. On a aussi :

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Exemples express et fréquents :

1) i) $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^-}$ sommable $\iff \sum_{n \geq 0} a_{-n}$ cv

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^-} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n}$$

2) i) $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\iff \sum_{n \geq 1} a_{-n}$ cv

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{-*}} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

Démo

1) i) $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^-}$ sommable $\iff \sum_{n \geq 0} a_{-n}$ cv ?

ii) Dans le cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^-} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n} \quad ?$$

On a : $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^- = \mathbb{I}$ est bijective
 $n \longmapsto \sigma(n) = -n$



Prop 7

Soit $(a_i)_{i \in I}$ famille positive sommable,

Toute sous-famille de $(a_i)_{i \in I}$ est aussi sommable.

Démo

Sommations par paquets

Prop 8

$(a_i)_{i \in I}$ famille positive et I dénombrable,

I_1 et I_2 forment une partition de I . On a :

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (a_i)_{i \in I_1}$ et $(a_i)_{i \in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i$$

Exercice d'application

Soit $q \in]0, 1[$.

Montrer que la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et

calculer sa somme.

Solution

1) Montrer que la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

$\mathbb{Z}^-$ et $\mathbb{N}^*$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

Alors :

$$(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \left((q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}^-} \text{ et } (q^{|n|})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sommables} \right)$$

Et on a :

$$(q^{|n|})_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sommable} \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{n \geq 1} q^{|n|} \text{ converge}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} q^n \text{ converge}$$

Ce qui est vrai, car $q \in]0, 1[$.

D'où $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable.

et on a :

$$(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}^-} \text{ sommable} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} q^{|-n|} \text{ converge}$$

Car $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^-$; $\sigma(n) = -n$ est bijective.

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} q^n \text{ converge}$$

Ce qui est vrai, car $q \in]0, 1[$.

Donc $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ sommable.

2) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} = ?$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^-} q^{|n|} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} q^{|n|} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{|-n|} + \sum_{n=1}^{+\infty} q^{|n|} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^n + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\ &= \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} \end{aligned}$$

On finit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} = \frac{1+q}{1-q}$$

□

Généralement, on a

Prop 9

$(a_i)_{i \in I}$ famille **positive** et I dénombrable.

$I_1, \dots, I_n$ forment une **partition** de I . On a:

1) $(a_i)_{i \in I}$ **sommable** $\Leftrightarrow (\forall 1 \leq k \leq n, (a_i)_{i \in I_k}$ est **sommable**)

2) Dans ce cas, on a:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

Plus généralement, on a

Prop 10

$(a_i)_{i \in I}$ famille **positive** et I dénombrable.

$(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de I . On a:

1) $(a_i)_{i \in I}$ **sommable** $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall k \in \mathbb{N}, (a_i)_{i \in I_k} \text{ est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right) \text{ converge} \end{cases}$

2) Dans ce cas, on a:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

Exercice d'application

Soit $q \in]0, 1[$.

1) Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$ converge en utilisant uniquement les outils des séries numériques.

2) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \{ 2^n(2i+1) \mid i \in \mathbb{N} \}$$

a) Montrez que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$ converge et

qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}} = \frac{q}{1 - q}$$

Solution

Soit $q \in]0, 1[$.

1) Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$ converge :

Notons $u_n = \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$, pour tout $n \geq 0$.

On a : $(\forall n \geq 0, u_n > 0)$.

Pensons à la règle de D'Alembert.

Oua :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^{n+2}}} \times \frac{1-q^{2^{n+1}}}{q^{2^n}}$$

$$= \lim_n \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^{n+2}}} \times \frac{q^{2^n \times 2}}{q^{2^n}}$$

$$= \lim_n \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^{n+2}}} \times \frac{\left(q^{2^n}\right)^2}{q^{2^n}}$$

$$= \lim_n \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^{n+2}}} \times \frac{q^{2^n}}{q^{2^n}}$$

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1, \text{ car } \lim_n q^{2^n} = 0$$

puisque $0 < q < 1$

Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, d'après D'Alembert.



2) Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \{ 2^n (2i+1) / i \in \mathbb{N} \}$$

a) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$.

Il s'agit de montrer les deux points suivants :

$$A) \forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset$$

$$B) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{N}^*$$

Montrons A) $\forall n \neq m, I_n \cap I_m = \emptyset$:

$$I_n = \{ 2^n (2i+1) / i \in \mathbb{N} \}$$

Supposons que $n \neq m$. Montrons que $I_n \cap I_m = \emptyset$.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $I_n \cap I_m \neq \emptyset$.

Soit alors $a \in I_n \cap I_m$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^n (2i+1), \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } i \in \mathbb{N}. \\ a = 2^m (2j+1), \text{ où } m \in \mathbb{N} \text{ et } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} 2^n (2i+1) = 2^m (2j+1) \\ n \neq m \end{cases}$$

Supposons par exemple que $n < m$.

Alors $m - n > 1$.

Ainsi $2^n (2i+1) = 2^m (2j+1)$ devient ?

$$(2i+1) = 2^{m-n} (2j+1)$$

Ce qui est absurde car $\begin{cases} 2^{m-n} (2j+1) \text{ est pair} \\ (2i+1) \text{ est impair} \end{cases}$



Montrons B) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{N}^*$

Procédons par double inclusion.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset \mathbb{N}^*$$

C'est claire car $(\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset \mathbb{N}^*)$

$$\mathbb{N}^* \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

$$I_n = \{2^n(2i+1) / i \in \mathbb{N}\}$$

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, Montrons que $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Càd montrons que $(\exists n \in \mathbb{N}, a \in I_n)$

Càd encore : $(\exists n \in \mathbb{N}, \exists i \in \mathbb{N}, a = 2^n(2i+1))$

a se décompose comme produit de facteurs premiers.

Regroupons les facteurs premiers différents de 2, qui sont des entiers impairs. Leur produit est alors un nombre impair de la forme $(2i+1)$.

Regroupons le facteur premier 2. Ça donnera la forme 2^n .

D'où la forme de a qui est $a = 2^n(2i+1)$.



b) On déduisons que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$ converge et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}} = \frac{q}{1 - q}$$

Remarquons que $\frac{q}{1 - q} = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$; (car $0 < q < 1$)

Ainsi :

$$\frac{q}{1 - q} = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} q^n \quad ; \quad \left(\begin{array}{l} \text{la série converge, donc la famille} \\ (q^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \end{array} \right)$$

D'autre part, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$

et $(q^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

$$\text{Alors on a : } \left\{ \begin{array}{l} \text{a) La série } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} q^i \right) \text{ converge} \\ \text{b) } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} q^i \right) \end{array} \right.$$

$$\sum_{i \in I_n} q^i = ?$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \{ 2^n(2i+1) / i \in \mathbb{N} \}$$

$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I_n$ est bijective.

$$i \mapsto \sigma(i) = 2^n(2i+1)$$

Alors :

$$\sum_{i \in I_n} q^i = \sum_{i=0}^{+\infty} q^{2^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} q^{2^n(2i+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} q^{2^{n+1} \cdot i} \times q^{2^n}$$

$$= q^{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^{2^{n+1}} \right)^i$$

$$\frac{1}{1 - q^{2^{n+1}}}$$

→ série géométrique

Donc

$$\sum_{i \in I_n} q^i = \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$$

Enfin, $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) La série } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} q^i \right) \text{ converge} \\ \text{b) } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} q^i \right) \end{array} \right.$

devient :

$$\text{a) La série } \sum_{n \geq 0} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}} \text{ converge}$$

$$\text{b) } \frac{q}{1 - q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{2^n}}{1 - q^{2^{n+1}}}$$



2) Familles sommables de réels et complexes

Notons $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf 1

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de K .

$(a_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** si et si la famille **positive** $(|a_i|)_{i \in I}$ est **sommable**.

Notations et Prop 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$1) \quad x^+ = \sup(x, 0) ; \quad x^- = \sup(-x, 0)$$

$$2) \quad x = x^+ - x^- ; \quad |x| = x^+ + x^-$$

$$3) \quad x^+ \geq 0 \text{ et } x^- \geq 0$$

$$4) \quad 0 \leq x^+ \leq |x| \text{ et } 0 \leq x^- \leq |x|$$

Démo

$$2) \text{ i) } x = x^+ - x^- ?$$

Cas 1 : si $x \geq 0$.

$$x^+ = \sup(x, 0) = x$$

$$x^- = \sup(-x, 0) = 0$$

$$x^+ - x^- = x$$

Cas 2 : si $x \leq 0$.

$$x^+ = \sup(x, 0) = 0$$

$$x^- = \sup(-x, 0) = -x$$

$$x^+ - x^- = x$$

$$ii) |x| = x^+ + x^- ?$$

$$\underline{\text{Cas 1: } \sin x \geq 0.}$$

$$x^+ = \sup(x, 0) = x$$

$$x^- = \sup(-x, 0) = 0$$

$$x^+ + x^- = x = |x|$$

$$\underline{\text{Cas 2: } \sin x \leq 0.}$$

$$x^+ = \sup(x, 0) = 0$$

$$x^- = \sup(-x, 0) = -x$$

$$x^+ + x^- = -x = |x|$$

$$3) x^+ \geq 0 \text{ et } x^- \geq 0 ?$$

$$x^+ = \sup(x, 0) \geq 0$$

$$x^- = \sup(-x, 0) \geq 0$$

$$4) i) 0 \leq x^+ \leq |x| ?$$

$$x^+ \leq |x| ?$$

$$\text{On: } |x| = x^+ + x^- \Rightarrow |x| - x^+ = x^- \geq 0 \\ \Rightarrow |x| \geq x^+$$

$$ii) 0 \leq x^- \leq |x| ?$$

Parc.

Rappels

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$1) z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$$

$$2) \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}.$$

$$3) |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

Prop et Déf 2

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels.

1) $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

2) La somme de la famille $(a_i)_{i \in I}$ est :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-$$

Démo

1) i) On a $\left(\begin{array}{l} \forall i \in I, a_i^+ \leq |a_i| \\ (|a_i|)_{i \in I} \text{ sommable} \end{array} \right)$, alors par comparaison des familles sommables positives, la famille $(a_i^+)_{i \in I}$ est sommable.

ii) Pareil pour $(a_i^-)_{i \in I}$.

Prop et Déf 3

Soit $(a_j)_{j \in I}$ une famille sommable de complexes.

1) $(\operatorname{Re}(a_j))_{j \in I}$ et $(\operatorname{Im}(a_j))_{j \in I}$ sont sommables.

2) La somme de la famille $(a_j)_{j \in I}$ est :

$$\sum_{j \in I} a_j = \sum_{j \in I} \operatorname{Re}(a_j) + i \cdot \sum_{j \in I} \operatorname{Im}(a_j)$$

Démo

- 1) On a $\left(\begin{array}{l} \forall j \in I, |Re(a_j)| \leq |a_j| \\ (|a_j|)_{j \in I} \text{ sommable} \end{array} \right)$, alors par comparaison des familles sommables positives, la famille $(Re(a_j))_{j \in I}$ est sommable.
- ii) Pareil pour $(Im(a_j))_{j \in I}$.

Prop 4

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On a :

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ ACV

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Démo

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable $\overset{\text{d'f}}{\iff} (|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable

$\iff$ La série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge (car $\forall n, |a_n| \geq 0$)

$\iff$ La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ ACV

2) Supp que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable, c'ad que $\sum_{n \geq 0} a_n$ ACV.

Alors que : $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Cas 1 : Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^+ - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^- \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (a_n^+)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (a_n^-)_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{sont positives} \end{array} \right) \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Combinaison linéaire de} \\ \text{séries convergentes} \end{array} \right) \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \left(\text{car } a_n^+ - a_n^- = a_n \right)\end{aligned}$$

Cas 2 : Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(a_n) + i \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Im}(a_n) \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(a_n) + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(a_n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } (\operatorname{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{et } (\operatorname{Im}(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{à valeurs dans } \mathbb{R} \end{array} \right) \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Re}(a_n) + i \operatorname{Im}(a_n)) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Opérations sur les} \\ \text{séries complexes} \\ \text{convergentes} \end{array} \right) \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \left(\text{car } a_n = \operatorname{Re}(a_n) + i \operatorname{Im}(a_n) \right)\end{aligned}$$

Prop 5

- 1) Toute famille finie de réels ou complexes est sommable.
 - 2) La somme coïncide avec sa somme finie $\sum_{i \in I} a_i$.
-

Prop 6 (lien avec les séries)

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. On a:

$$1) (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ ACV}$$

2) Dans ce cas, on a:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Démo

$$1) (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ ACV ?}$$

$$(a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \stackrel{\text{d'1}}{\iff} (|a_i|)_{i \in I} \text{ sommable}$$

$$\iff \sum_{n \geq 0} |a_{\sigma(n)}| \text{ CV} \quad \left(\begin{array}{l} \sigma: \mathbb{N} \rightarrow I \\ \text{une bijection} \\ \text{et famille positive} \end{array} \right)$$

$$\iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} a_{\sigma(n)} \text{ ACV}$$

2) On commence par le cas réel, puis on passe au cas complexe, comme vu précédemment.



Prop 7 (Combinaison linéaire)

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles sommables de réels ou complexes.

Toute combinaison linéaire $(\alpha a_i + \beta b_i)_{i \in I}$ est aussi sommable, et on a :

$$\sum_{i \in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \cdot \sum_{i \in I} a_i + \beta \cdot \sum_{i \in I} b_i$$

Démo

Prop 8 (Inégalité triangulaire)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. On a :

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$$

Démo

Prop 9

Toute sous-famille d'une famille sommable de réels ou complexes est aussi une famille sommable.

Sommations par paquets

Prop 10

$(a_i)_{i \in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I . On a :

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (a_i)_{i \in I_1}$ et $(a_i)_{i \in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i$$

Prop 11

$(a_i)_{i \in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

$I_1, \dots, I_n$ forment une partition de I . On a :

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (\forall 1 \leq k \leq n, (a_i)_{i \in I_k} \text{ est sommable})$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

Prop 12 (Somme par paquets)

I dénombrable et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I .

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. On a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, (a_i)_{i \in I_n}$ sommable.

2) La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} a_i \right)$ ACV.

$$3) \sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} a_i \right)$$

↙
c'est la somme par paquets

NB

Pour montrer la sommabilité de la fllr $(a_i)_{i \in I}$ de réels ou complexes,
On applique à la fllr positive $(|a_i|)_{i \in I}$ la caractérisation
par paquets.

3) Limites doubles

★ $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

★ $i \in I$ c'est $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

★ $(a_i)_{i \in I}$ c'est $(a_{(m,n)})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

★ On écrit a_{mn} au lieu de $a_{(m,n)}$

★ On étudiera ici les familles du type $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$
dites *limites doubles*.

★ Ou aussi les *limites doubles* $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$

En gros, on applique ce qui précède à des partitions particulières de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ou ...

Partitions usuelles de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

1) $(\mathbb{N} \times \{n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2) $(\{n\} \times \mathbb{N})_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

où $I_n = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / i + j = n\}$

NB

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{I}_n = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / i + j = n\}$$

$$\mathcal{I}_n = \{(i, n-i) / 0 \leq i \leq n\}$$

$$\mathcal{I}_n = \{(n-i, i) / 0 \leq i \leq n\}$$

Partitions usuelles de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

1) $(\mathbb{N}^* \times \{n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

2) $(\{n\} \times \mathbb{N}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

3) $(\mathcal{I}_n)_{n \geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

$$\text{où } \mathcal{I}_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / i + j = n\}$$

NB

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\mathcal{I}_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / i + j = n\}$$

$$\mathcal{I}_n = \{(i, n-i) / 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$\mathcal{I}_n = \{(n-i, i) / 1 \leq i \leq n-1\}$$

Exercice d'application

Déterminer tous les réels α tels que la suite double

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \text{ soit sommable.}$$

Solution

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \Leftrightarrow ?$$

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est positive.

et $(I_k)_{k \geq 2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$, où $I_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / i+j=k\}$

D'où :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall k \geq 2, \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in I_k} \text{ est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) \text{ converge.} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ a) $\forall k \geq 2, \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in I_k}$ est sommable $\Rightarrow$ est vérifiée car c'est une famille finie.

D'où :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable } \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) \text{ converge}$$

$$\sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = ?$$

$$\text{On a : } I_k = \{ (i,j) \in \mathbb{N}^{*2} / i+j=k \}$$

$$= \{ (i, k-i) / 1 \leq i \leq k-1 \}$$

$$\text{D'où } \text{Card}(I_k) = k-1$$

$$(m,n) \in I_k \Leftrightarrow m+n=k$$

Pour $k \geq 2$. On a :

$$\left(\sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) = \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{k^\alpha}$$

→ constante

$$= \text{Card}(I_k) \times \frac{1}{k^\alpha}$$

$$= \frac{k-1}{k^\alpha}$$

Ainsi :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable } \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k^\alpha} \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \text{ converge } \left(\text{car } \frac{k-1}{k^\alpha} \sim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^\alpha} \sim \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1 \quad (\text{série de Riemann})$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 2$$

Enfin :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \alpha > 2$$

□

Prop 1

Soit $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double positive.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) A) $\forall m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$ converge.

iii) A) $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m \geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$ converge.

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$$

Démo

$$(i) \Leftrightarrow (iii)$$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \mathbb{N} \times \{n\}$.

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *partition* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et la famille

$(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est *positive*.

D'où :

$$(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, (a_{mp})_{(m,p) \in I_n} \text{ est sommable,} \\ \text{b) } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{(m,p) \in I_n} a_{mp} \right) \text{ converge} \end{cases}$$

Et dans ce cas, on aura :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(m,p) \in I_n} a_{mp} \right)$$

$$\text{Or } (m,p) \in I_n \Leftrightarrow (m,p) \in \mathbb{N} \times \{n\} \Leftrightarrow (m \in \mathbb{N} \text{ et } p=n)$$

D'où

$$(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, (a_{mn})_{m \in \mathbb{N}} \text{ est sommable,} \\ \text{b) } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} a_{mn} \right) \text{ converge} \end{cases}$$

$$(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{m \geq 0} a_{mn} \text{ Converge} \\ \text{b) } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right) \text{ Converge} \end{cases}$$



Et dans ce cas, on aura :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(m,p) \in I_n} a_{mp} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$$



Pour (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

On procède de même en considérant l'autre partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(\{n\} \times \mathbb{N})_{n \in \mathbb{N}}$.



Prop 2

Soit $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou complexes.

Supposons que $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$$

RIR :

En pratique, pour montrer la sommabilité de la suite double $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$, on applique la (prop 1) à la suite $(|a_{mn}|)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$.

4) Produit de Cauchy de deux séries complexes

Déf 1

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries complexes.

Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum_{n \geq 0} c_n$

où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

NB :

On a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Prop 2

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries complexes **ACV**. On a :

1) La suite double $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

2) La série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} C_n$ est **ACV**.

$$3) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q$$

Démo

Supp que : $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries complexes **ACV**

1) La suite double $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, en eff/et :

$$(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \Leftrightarrow (|a_p b_q|)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A) \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{q \geq 0} |a_p| |b_q| < +\infty \\ B) \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q \geq 0} |a_p| |b_q| \right) < +\infty \end{cases}$$

$$A) \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{q \geq 0} |a_p| |b_q| < +\infty, \text{ est vérifié, car } \sum_{q \geq 0} b_q \text{ ACV}$$

$$B) \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q \geq 0} |a_p| |b_q| \right) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{p \geq 0} \left(|a_p| \cdot \sum_{q \geq 0} |b_q| \right) < +\infty$$

Ce qui est vérifié, vu que $\sum_{p \geq 0} a_p \text{ ACV}$. □

ii) On a que la suite double $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_p b_q \right) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(a_p \cdot \sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right) \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right) \end{aligned}$$

iii) Considérons maintenant la partition $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ où

$$I_n = \{ (i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j=n \}.$$

On a que $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

D'où :

$$A) \text{ La série } \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} a_p b_q \right) \text{ est ACY}$$

$$B) \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} a_p b_q \right)$$

$$\text{et on a : } \sum_{(p,q) \in I_n} a_p b_q = \sum_{p+q=n} a_p b_q = C_n$$

D'où

$$A) \text{ La série } \sum_{n \geq 0} C_n \text{ est ACY}$$

$$B) \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n$$

CQFD

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Réflexe à avoir

Exercice d'applicationSoit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$.Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$ est ACV et préciser sa somme.Brouillon

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = ?$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

→ outil

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n z^k \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n z^k \cdot z^{n-k} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_k = z^k \\ b_{n-k} = z^{n-k} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_k = z^k$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-z} \right)^2$$

Rédaction

Les deux séries $\sum_{n \geq 0} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} z^n$ sont ACV car $|z| < 1$.

D'où leur série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} C_n$ est ACV, où :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \sum_{k=0}^n z^k \cdot z^{n-k} \right)$$

$$\text{Or } C_n = \sum_{k=0}^n z^k = (n+1)z^n$$

Alors la série $\sum_{n \geq 0} (n+1)z^n$ est ACV, et finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

□

FIN