Espaces vectoriels de dimensions finies

N.B : $\mathbb{K}$ *désignera* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto 1$
2) (f,g,h,i) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$, h :$x \mapsto xsin(x)$ et i :$x \mapsto xcos(x)$
3) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin^2(x)$, g :$x \mapsto cos^2(x)$ et h :$x \mapsto 1$
4) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto e^x$

Exercice 2

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où $\begin{cases} Q_1 &= X^2+1 \\ Q_2 &= 3X^2-X+3 \\ Q_3 &= X^2-X-1 \end{cases}$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Sioui, déterminer les coordonnées de X.

Exercice 3

1) $E = F([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto sin^k(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre.
2) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, ..., g_n)$ est libre.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in L(E)$.
Montrer que

$$(ker(f) = Im(f)) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \ et \ n = 2rg(f))$$

Exercice 5

Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^5$ tels que dim(F)=dim(G)=3.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux sev de E vérifiant $dim(F) + dim(G) \succ n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$

1) Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) Considérons l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$.

Montrer φ est un isomorphisme. Conclure quant à la structure de E.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'indice 3.

1) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

3) En déduire que $rg(f) = 2$.

4) Notons $C_f = \{g \in L(E) |\ gf = fg\}$

   i) Montrer que C_f est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

   ii) Montrer que (I_E, f, f^2) est une base de C_f.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'indice n.

1) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

2) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

3) Déduire que $rg(f) = n - 1$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux.

Posons pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $L_k(X) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \left(\frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$

1) Quel est $deg(L_k)$?

2) Calculer $L_k(a_i)$ quand $k = i$ et quand $k \neq i$.

3) Montrer que la famille $(L_k)_{0 \preceq k \preceq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. (dite *base de Lagrange*)

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de celui-ci dans cette base.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de

E vérifiant $rg(f) = rg(f^2)$.
Montrer que $E = ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$
   ii) $E = ker(f) + Im(f)$
   iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$
2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $ker(f) = ker(f^2)$
   ii) $Im(f) = Im(f^2)$
   iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$
3) Soit f' la restriction de f à Im(f).
   i) Montrer que $ker(f') = ker(f) \cap Im(f)$ et $Im(f') = Im(f^2)$
   ii) En déduire que $rg(f) = rg(f^2) + dim\,(ker(f) \cap Im(f))$

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $I_p = Im(u^p)$ et $K_p = ker(u^p)$.

1) Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1}\ et\ I_{p+1} \subset I_p$$
2) Supposons que u est injectif.
   Déterminer I_p et K_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3) Supposons que u est non injectif.
   i) Montrer que : $(\exists\ 0 \preceq p \preceq n \mid K_p = K_{p+1})$
      Indice : Vous pouvez raisonner par l'absurde, puis introduire la dimension.
      r désignera le plus petit entier $0 \preceq p \preceq n$ vérifiant $K_p = K_{p+1}$.
   ii) Montrer que :
      a) $I_r = I_{r+1}$
      b) $\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p}$
   iii) En déduire que $(\forall p \in \mathbb{N},\ I_r = I_{r+p})$
4) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $f, g \in L(E, \mathbb{K})$.
Montrer que

$$ker(f) = ker(g) \;\Leftrightarrow\; (\exists \alpha \in \mathbb{K}^*,\; g = \alpha f)$$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in L(E)$ vérifiant $fg - gf = I_E$.

1) Montrer que
   i) $\forall n \succeq 1,\; fg^n - g^n f = ng^{n-1}$
   ii) $\forall n \succeq 1,\; f^n g - gf^n = nf^{n-1}$
2) Montrer que pour tout $n \succeq 1$, les familles suivantes sont libres :

$$(I_E, f, ..., f^n) \; et \; (I_E, g, ..., g^n)$$

3) En déduire que E est de dimension infinie.
4) On veut un exemple.
   Vérifier que (E=$\mathbb{R}[X]$, $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$) convient.