Correction

1. Supposons $f=\alpha.I$. La relation $f^2=\frac{1}{2}(f+I)$ donne $\alpha^2 I=\frac{1}{2}(\alpha.I+I)$ d'où $(2\alpha^2-\alpha-1).I=\tilde{0}$ puis $2\alpha^2-\alpha-1=0$. Par suite $\alpha=1$ ou $\alpha=-1/2$. Inversement ok.

2.a $f^2=\frac{1}{2}(f+I)$ donne $2f^2-f=I$ d'où $f\circ(2f-I)=I$ et $(2f-I)\circ f=I$.
Par suite f est inversible et $f^{-1}=2f-I$.

2.b $\ker(f-I)$ et $\ker(f+\frac{1}{2}I)$ sont les noyaux des endomorphismes $f-I$ et $f+\frac{1}{2}I$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels.

2.c Soit $\vec{x}\in\ker(f-I)\cap\ker(f+\frac{1}{2}I)$. On a $f(\vec{x})=\vec{x}$ et $f(\vec{x})=-\frac{1}{2}\vec{x}$ donc $\vec{x}=\vec{o}$.

Ainsi $\ker(f-I)$ et $\ker(f+\frac{1}{2}I)$ sont en somme directe.

Montrons $E=\ker(f-I)+\ker(f+\frac{1}{2}I)$ par analyse/synthèse.

Analyse : Soit $\vec{x}\in E$. Supposons $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}\in\ker(f-I)$ et $\vec{v}\in\ker(f+\frac{1}{2}I)$.

$f(\vec{x})=f(\vec{u})+f(\vec{v})=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ donc $\vec{v}=\frac{2}{3}\vec{x}-\frac{2}{3}f(\vec{x})$ et $\vec{u}=\vec{x}-\vec{v}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}f(\vec{x})$.

Synthèse : Soit $\vec{x}\in E$. Posons $\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}f(\vec{x})$ et $\vec{v}=\frac{2}{3}\vec{x}-\frac{2}{3}f(\vec{x})$.

On a $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$, $f(\vec{u})=\frac{1}{3}f(\vec{x})+\frac{2}{3}f^2(\vec{x})=\frac{2}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}=\vec{u}$ donc $\vec{u}\in\ker(f-I)$

et $f(\vec{v})=\frac{2}{3}f(\vec{x})-\frac{2}{3}f^2(\vec{x})=\frac{1}{3}f(\vec{x})-\frac{1}{3}\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{v}$ donc $\vec{v}\in\ker(f+\frac{1}{2}I)$.

Finalement $E=\ker(f-I)\oplus\ker(f+\frac{1}{2}.I)$.

2.d $(f+\frac{1}{2}I)\circ(f-I)=f^2+\frac{1}{2}f-f-\frac{1}{2}I=f^2-\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}I=\tilde{0}$.

Puisque $(f+\frac{1}{2}I)\circ(f-I)=\tilde{0}$ on a $\operatorname{Im}(f-I)\subset\ker(f+\frac{1}{2}I)$.

Mais $\dim\operatorname{Im}(f-I)=\dim E-\dim\ker(f-I)$ et $E=\ker(f-I)\oplus\ker(f+\frac{1}{2}.I)$ donne

$\dim\ker(f-I)+\dim\ker(f+\frac{1}{2}I)=\dim E$ d'où $\dim\operatorname{Im}(f-I)=\dim\ker(f+\frac{1}{2}I)$ puis

$\operatorname{Im}(f-I)=\ker(f+\frac{1}{2}I)$ par inclusion et égalité des dimensions.

2.e Comme ci-dessus $(f-I)\circ(f+\frac{1}{2}I)=\tilde{0}$ donc $\operatorname{Im}(f+\frac{1}{2}I)\subset\ker(f-I)$ puis par égalité des dimensions,

on obtient $\operatorname{Im}(f+\frac{1}{2}I)=\ker(f-I)$

3.a $f^3=f\circ f^2=f\circ\frac{1}{2}(f+I)=\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}f=\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}I$.

$f^4=f\circ f^3=\frac{3}{4}f^2+\frac{1}{4}f=\frac{5}{8}f+\frac{3}{8}I$.

3.b Unicité : Supposons $f^n=a_n.f+b_n.I$ et $f^n=\alpha_n.f+\beta_n.I$
On a alors $(a_n-\alpha_n).f+(b_n-\beta_n).I=\tilde{0}$ or f et I sont libres donc $a_n=\alpha_n$ et $b_n=\beta_n$.
Existence : Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$: $a_0=0$ et $b_0=1$ conviennent.

Pour $n=1$: $a_1=1$ et $b_1=0$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.

$$f^{n+1}=f\circ f^n \underset{HR}{=} f\circ(a_n.f+b_n.I)=a_n.f^2+b_n.f=(\frac{a_n}{2}+b_n).f+\frac{a_n}{2}.I=a_{n+1}.f+b_{n+1}.I\ .$$

avec $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n$ et $b_{n+1}=\frac{a_n}{2}$.
Récurrence établie.

3.c $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{2}+b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$. (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2=\frac{r+1}{2}$ de racines 1 et $-\frac{1}{2}$. Par suite il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\lambda+\mu\left(\frac{-1}{2}\right)^n$.

$a_0=0$ et $a_1=1$ donne $\lambda=\frac{2}{3}$ et $\mu=-\frac{2}{3}$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque $b_{n+1}=\frac{a_n}{2}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*, b_n=\frac{a_{n-1}}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ formule aussi valable pour $n=0$.

Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$, on observe effectivement que $a_n\to 2/3$ et $b_n\to 1/3$.

3.d $p^2=\frac{4}{9}f^2+\frac{4}{9}f+\frac{1}{9}I=\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}I=p$ donc p est une projection vectorielle.

$\operatorname{Im} p=\operatorname{Im}\left(\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}.I\right)=\operatorname{Im}(f+\frac{1}{2}I)=\ker(f-I)$ et $\ker p=\ker\left(\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}I\right)=\ker(f+\frac{1}{2}I)=\operatorname{Im}(f-I)$.

Finalement p est la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} p=\ker(f-I)$ parallèlement à $\ker p=\operatorname{Im}(f-I)$.

4.a $\mathcal{M}\subset\mathcal{L}(E)$ et $I\in\mathcal{M}$ en prenant $\lambda=0$ et $\mu=1$.
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $g,h\in\mathcal{M}$. On peut écrire $g=\lambda f+\mu I$ et $h=\lambda' f+\mu' I$.
$\alpha.g+\beta.h=(\alpha\lambda+\beta\lambda')f+(\alpha\mu+\beta\mu')I\in\mathcal{M}$ et

$$gh=\lambda\lambda' f^2+(\lambda\mu'+\lambda'\mu)f+\mu\mu' I=(\lambda\mu'+\lambda'\mu+\frac{\lambda\lambda'}{2})f+(\mu\mu'+\frac{\lambda\lambda'}{2})I\in\mathcal{M}$$

Par suite $\mathcal{M}$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
De plus on observe $gh=hg$. Cette sous-algèbre est donc commutative.

4.b (f,I) est famille génératrice de $\mathcal{M}$ puisque par définition $\mathcal{M}=\operatorname{Vect}(f,I)$.
Par hypothèse, (f,I) est libre et donc (f,I) est une base de $\mathcal{M}$.
Finalement $\dim\mathcal{M}=2$.