Correction Probas Mine Pont

olis Gitt

1°) $\forall t\in\mathbb{R},\ ch(t)\leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$; en effet :

$$ch\,t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\ ;\ e^{\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n.n!}$$

Il suffit de m. que : $\left(\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{(2n)!}\leqslant\frac{1}{2^n.n!}\right)$

On a : $(2n)!=\underbrace{\underbrace{2n}_{\geqslant 2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n+1)}_{\geqslant 2}}_{\geqslant 2^n}\cdot n!\geqslant 2^n.n!$ $(\forall n\geqslant 1)$

$\Rightarrow\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(2n)!}\leqslant\frac{1}{2^n.n!}}$ ((Egalité encore vrai pour $n=0$)

2°) Soit $t\in\mathbb{R}$, soit $-1\leqslant x\leqslant 1$.

M. que : $\exp(tx)\leqslant\frac{1+x}{2}\exp(t)+\frac{1-x}{2}\exp(-t)$

exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Posons $\lambda=\frac{1+x}{2}$, $\mu=\frac{1-x}{2}$, on a $\lambda\geqslant 0,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$

$$\Rightarrow \exp(\underbrace{\lambda t+\mu.(-t)}_{=tx})\leqslant\lambda\exp(t)+\mu\exp(-t)$$

3°) a) X var centrée et bornée par 1.

M. que X est 1 - sous gaussienne

On a : $|X|\leqslant 1$ et $E(X)=0$.

On veut m. que : $\left(\forall t\in\mathbb{R},\ E\left(\exp(tX)\right)\leqslant\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)$

Soit $t \in \mathbb{R}$, On a :

$\exp(tX) \leqslant \frac{1+X}{2} \cdot \exp(t) + \frac{1-X}{2} \cdot \exp(-t)$ $\left(\begin{array}{l} -1 \leqslant X \leqslant 1 \text{ et} \\ \text{via } 2°/ \end{array} \right)$

$$\Rightarrow E\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp(t) \cdot \underbrace{E\left(\frac{1+X}{2}\right)}_{= \frac{1}{2}(1+\underbrace{E(X)}_{=0})} + \exp(-t) \cdot \underbrace{E\left(\frac{1-X}{2}\right)}_{= \frac{1}{2}}$$

vu la croissance et la linéarité de l'espérance.

$$\Rightarrow E\left(\exp(tX)\right) \leqslant Ch(t) \underset{1°/}{\leqslant} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$ ☒

b°) Soit X une var bornée par $\alpha > 0$, et centrée.
M.que X est α-sous-gaussienne.

On a : $|X| \leqslant \alpha$ et $E(X) = 0$.

M.que : $\left(\forall t \in \mathbb{R}, E\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \right)$

On a $\frac{X}{\alpha}$ est bornée par 1 et centrée $\left(E\left(\frac{X}{\alpha}\right) = \frac{E(X)}{\alpha} = 0 \right)$

$$\overset{a°/}{\Longrightarrow} \forall t \in \mathbb{R}, E\left(\exp\left(t \cdot \frac{X}{\alpha}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Soit $s \in \mathbb{R}$, On a :

$$E\left(\exp(sX)\right) = E\left(\exp\left((\alpha s) \cdot \frac{X}{\alpha}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{(\alpha s)^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall s \in \mathbb{R}, E\left(\exp(sX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 s^2}{2}\right)}$$ CQFD

4°) Soient $X_1, \dots, X_n$ des var mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes ;
Soient $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$.
M. que : $\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i \right)$ est α-sous-gaussienne

Soit $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit de m. que :

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On a :

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) = E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i t X_i\right)\right)$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(\mu_i t X_i)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{E\left(\exp(\mu_i t X_i)\right)}_{\leq \exp\left(\frac{\alpha^2 \mu_i^2 t^2}{2}\right)}$$ (car les var $(\exp(\mu_i t X_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont mut. indép.)

$$\leq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\alpha^2 \mu_i^2 t^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^2 \mu_i^2 t^2}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}_{=1}\right)}_{= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)}$$

Fin

5°) Soit X une var α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$.
Soit $t > 0$. Montrons que :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

On sait l'inég de Markov

Rappel : $X \geq 0$, $a > 0$ $\Rightarrow P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

$$P(X \geq \lambda) = P\left(\exp(tX) \geq \exp(t\lambda)\right) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)}$$

$$\leq \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)}{\exp(t\lambda)}$$ (car X α-sous-gaussienne)

$$= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$

Fin

ii) $\boxed{\text{On déduisons que : } P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}$

$$(|X| \geqslant \lambda) = (X \geqslant \lambda) \cup (-X \geqslant \lambda)$$

$$P(|X| \geqslant \lambda) = \underbrace{P(X \geqslant \lambda)}_{\leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)} + \underbrace{P(-X \geqslant \lambda)}_{\leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)}$$

$(-X)$ aussi α-sous-gaussienne

$$\Rightarrow P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right) ; \ (\forall t > 0)$$

pour terminer la question, il suffit de montrer qu'il existe $t > 0$ tel que : $\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}$

On a :

$$\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda + \frac{\lambda^2}{2\alpha^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 t^2 - 2t\lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha t - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

Ainsi, pour $t = \frac{\lambda}{\alpha^2} > 0$, on tire que :

$$\boxed{P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}$$

6°) Soit $X \geqslant 0$. Montrons que :

(X admet une espérance finie) $\Longleftrightarrow \sum_k P(X \geqslant k)$ converge

On a : $[X] \leqslant X \leqslant [X]+1$

($\Rightarrow$) On a $\begin{pmatrix} [X] \leqslant X \\ E(X) \text{ finie} \end{pmatrix} \Longrightarrow [X]$ est d'espérance finie

$\Longrightarrow \sum_k P([X] \geqslant k)$ CV $\begin{pmatrix} \text{car } [X] \text{ à valeurs} \\ \text{dans } \mathbb{N} \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \sum_k P(X \geqslant k)$ CV $\blacksquare$

car $(X \geqslant k) = ([X] \geqslant k)$

($\Leftarrow$) Supposons que $\sum_k P(X \geqslant k)$ CV.

alors $\sum_k P([X] \geqslant k)$ CV (car $(X \geqslant k) = ([X] \geqslant k)$)

D'où $[X]$ possède une espérance finie $\begin{pmatrix} \text{car } [X] \text{ à valeurs} \\ \text{dans } \mathbb{N} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E([X]+1)$ existe et finie

or $X \leqslant [X]+1$ et tout positives

alors $E(X)$ existe et finie $\blacksquare$

M.q. : $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$

Supp. que $E(X)$ existe et finie.

on a : $[X] \leq X < [X]+1$.

$\Rightarrow E([X]) \leq E(X) \leq E([X]+1)$ (croissance de l'espérance)

$\Rightarrow E([X]) \leq E(X) \leq 1 + E([X])$

or $\displaystyle E([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k)$ ($[X]$ à valeurs dans $\mathbb{N}$)

et que $P([X] \geq k) = P(X \geq k)$

D'où l'égalité voulue

$\boxed{}$

7°) a°) Soit X une var α-sous-gaussienne. Soit $\beta > 0$.
Soit $k > 0$.
M. que : $\boxed{P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\gamma} \text{ où } \gamma = \alpha^{-2}\beta^{-2}.}$

On a : $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) = P\left(\frac{\beta^2 X^2}{2} \geq \ln k\right) = P\left(X^2 \geq \frac{2\ln k}{\beta^2}\right)$

Cas 1 : si $0 < k \leq 1$ (ie $\frac{2\ln k}{\beta^2} \leq 0$)

On aura $P\left(X^2 \geq \frac{2\ln k}{\beta^2}\right) = P(\Omega) = 1 \leq 2k^{-\gamma}$ $\left(\begin{array}{c} k \leq 1 \\ \Downarrow \\ 2k^{-\gamma} \geq 1 \end{array}\right)$

négatif

L'inégalité est donc vérifiée.

Cas 2 : si $k > 1$

On a $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) = P\left(X^2 \geq \frac{2\ln k}{\beta^2}\right) = P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2\ln k}}{\beta}\right)$ >0

et $P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2\ln k}}{\beta}\right) \geq \underbrace{2\exp\left(-\frac{\frac{2\ln k}{\beta^2}}{2\alpha^2}\right)}_{= 2\exp\left(-\frac{\ln k}{(\alpha\beta)^2}\right) = 2k^{-\gamma}}$ (d'après 5°)

Enfin : $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\gamma}$

b°) Supposons que $\alpha\beta < 1$.
En déduire que la var $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie, et que $E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \leq 1 + 2\gamma(2)$

On pensera à la question 6°.
la var $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. alors il suffit de vérifier que la série $\sum_k P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$ converge.

d'après a°/, on a : $\left(\forall k>0,\quad P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\geqslant k\right)\leqslant 2\cdot\frac{1}{k^{\gamma}}\right)$

alors il suffit de vérifier que $\sum_k \frac{1}{k^{\gamma}}$ converge

(ce sont en fait des séries à termes positifs)

et $\gamma>1$ car $\alpha\beta<1$

Donc la série de Riemann $\sum_k \frac{1}{k^{\gamma}}$ converge □

★ $E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right)\leqslant 1+2\zeta(\gamma)$; En effet :

D'après la question 6°/, on a :

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\right)\leqslant 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{P\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)\geqslant k\right)}_{\leqslant 2k^{-\gamma}}$$

$$\leqslant 1+2\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-\gamma}}_{=\zeta(\gamma)}$$

Fin prob

Pause : Vérifions que $1+2\zeta(2)\leqslant 5$;

càd $\zeta(2)\leqslant 2$:

$$\zeta(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant 1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}$$

et on a : $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\xrightarrow{\text{téléscopie}}1$ □

Orlicz :

Mathématicien polonais.

décédé en 1990