Partie 4

Ex 1 1°) $(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^{k} x^k$, donc le coefficient en x^l est C_{m+n}^{l}. (α)

D'autre part, $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n (1+x)^m = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i x^i\right)$

On utilise le rappel suivant :

Rappel : Si $P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $Q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux polynôme, leur produit est $P(x)Q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$; où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$(1+x)^{n+m} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} C_m^i x^i\right)$ (c'est OK, on rappelle que $C_n^k = 0$ si $k > n$)

Rappel $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$; où $c_k = \sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j}$

D'où le coefficient en x^l de $(1+x)^{n+m}$ est $c_l = \sum_{j=0}^{l} C_n^j C_m^{l-j}$ (β)

De (α) et (β) on tire que : $C_{m+n}^{l} = \sum_{j=0}^{l} C_n^j C_m^{l-j}$ CQFD

2°) $P(X+Y=l) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, X+Y=l)$ (c'est la Formule de proba Totale pour le syst complet d'événe $(X=k)_{0\le k\le n}$)

$= \sum_{k=0}^{l} P(X=k, X+Y=l)$ (car $\forall k \geq l+1$, $(X=k, X+Y=l) = \emptyset$ et donc $P(X=k, X+Y=l) = 0$)

$= \sum_{k=0}^{l} P(X=k, Y=l-k)$

$= \sum_{k=0}^{l} P(X=k) P(Y=l-k)$ (car X et Y sont indépendants : $P(X=i, Y=j) = P(X=i)(P(Y=j)$)

$$= \sum_{k=0}^{l} C_n^k p^k q^{n-k} \cdot C_m^{l-k} p^{l-k} q^{m-l+k} \quad \left(\begin{array}{l} X \sim B(n,p) \text{ et} \\ Y \quad B(m,p) \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{l} C_n^k C_m^{l-k} \left(p^l q^{m+n-l} \right)$$

$$= p^l q^{m+n-l} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{l} C_n^k C_m^{l-k}}_{\overset{1°/}{=} C_{m+n}^{l}} = C_{m+n}^{l} p^l q^{m+n-l}$$

On dit : $\begin{cases} Z(\Omega) = \{0, \dots, m+n\} \quad (\text{car } X(\Omega) = \{0, \dots, n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{0, \dots, m\}) \\ \forall l \in [\![0, m+n]\!],\ P(Z=l) = C_{m+n}^{l} p^l q^{m+n-l} \end{cases}$

Càd $(X+Y) \sim B(m+n, p)$

Ex 2 Soient X et Y deux var suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Et supposons que X et Y sont indépendantes.
On montrera que $(X+Y)$ et $(X-Y)$ ne sont pas indépendantes.
Pour cela, on montrera que

$$P(X+Y=2, X-Y=0) \neq P(X+Y=2) \cdot P(X-Y=0)$$

On a $(X+Y=2, X-Y=0) = (X+Y=2, X=Y) = (X=1, Y=1)$

D'où $P(X+Y=2, X-Y=0) = P(X=1, Y=1) = \underbrace{P(X=1)}_{=\frac{1}{2}} \underbrace{P(Y=1)}_{=\frac{1}{2}}$ (car X et Y indép)

D'où $P(X+Y=2, X-Y=0) = \frac{1}{4}$.

On rappelle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

alors $(X+Y=2) = (X=1, Y=1)$, et donc $P(X+Y=2) = P(X=1, Y=1)$

$\Rightarrow \boxed{P(X+Y=2)} \xlongequal{\text{car X et Y sont indép}} \underbrace{P(X=1)}_{1/2} \underbrace{P(Y=1)}_{1/2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

et on a aussi : $\begin{cases} (X-Y=0) = (X=Y) = (X=0, Y=0) \sqcup (X=1, Y=1) \\ \text{car encore } X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\} \end{cases}$

D'où $\boxed{P(X-Y=0)} = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1)$

$$= \underbrace{P(X=0)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P(Y=0)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(X=1)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P(Y=1)}_{\frac{1}{2}} \quad \left(\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indép}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

En fin $P(X+Y=2, X-Y=0) = \frac{1}{4}$ et $P(X+Y=2)\,P(X-Y=0) = \frac{1}{8}$

Donc $P(X+Y=2, X-Y=0) \neq P(X+Y=2)\,P(X-Y=0)$

$\Rightarrow$ $X+Y$ et $X-Y$ ne sont pas indépendantes

Ex 3

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$. X et Y sont indépendantes.

$\forall\, 1 \leq i \leq n$, $P(X=a_i) = P(Y=a_i) = p_i$.

1) $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(X=a_i) = 1$

2) $P(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$; En effet :

On a $(X=Y) = \bigsqcup_{i=1}^{n} (X=a_i, Y=a_i)$ $\left(X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\} = Y(\Omega)\right)$

$$\Rightarrow P(X=Y) = \sum_{i=1}^{n} P(X=a_i, Y=a_i) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{P(X=a_i)}^{=p_i}\,\overbrace{P(Y=a_i)}^{=p_i} \quad \left(\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X \neq Y)} = 1 - P(X=Y) \quad \left(\text{car } (X \neq Y) = \overline{(X=Y)}\right)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_i^2) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)}$$

Ex4 Soit $a > 0$.

On a $(|X| \geq a) \subset \left(g(|X|) \geq g(a)\right)$ (car g croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$$\Rightarrow P(|X| \geq a) \leq P(g(|X|) \geq g(a))$$

$$\leq \boxed{\frac{E(g(|X|))}{g(a)}} \quad \left(\text{D'après l'inégalité de Markov car } g(|X|) \geq 0 \text{ et } g(a) > 0\right)$$

CQFD

Ex 5

On a $(X-np \geq n\varepsilon) = (X-np-n\varepsilon \geq 0)$

$= (\lambda(X-np-n\varepsilon) \geq 0)$ (car $\lambda > 0$)

$= (\exp(\lambda(X-np-n\varepsilon)) \geq 1)$ (car $t \geq 0 \Leftrightarrow \exp(t) \geq 1$)

D'où $P(X-np \geq n\varepsilon) = P(\underbrace{\exp(\lambda(X-np-n\varepsilon))}_{\text{var positive, on applique Markov}} \geq 1)$

$$\leq \frac{E(\exp(\lambda(X-np-n\varepsilon)) \geq 1)}{1}$$

CQFD

Ex 6

$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X=k) = a C_n^k$.

1°) On a $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1 \Rightarrow a \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k}_{=(1+1)^n = 2^n} = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2^n}$

2°) $\boxed{E(X)} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} k P(X=k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$. On sait que $\begin{cases} k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} \\ \forall 1 \leq k \end{cases}$

$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{2^n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}}_{=2^{n-1}} = \boxed{\frac{n}{2}}$

Méthode 2 : On remarque : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X=k) = \frac{C_n^k}{2^n} = \boxed{C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}$

D'où $X \sim B(n, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \boxed{E(X) = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}}$ (Rappel : Si $X \sim B(n,p)$ alors $E(X) = np$)

Ex 7 :

$X \sim B(n, p)$. $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = ?$

On a : $E\left(\frac{1}{X+1}\right) \overset{\text{Formule de transfert}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} p^k q^{n-k}$.

On sait que. $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$, càd $\frac{C_n^k}{n} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}}$$

Ainsi : $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} p^k q^{n-k}$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k} p^{k-1} q^{n-k+1} = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k} p^{k} q^{n+1-k}$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} p^{k} q^{n+1-k}}_{=(p+q)^{n+1}=1} - q^{n+1} \right) = \boxed{\frac{1-q^{n+1}}{p(n+1)}}$$

Ex 8 Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que : $(\forall 1 \leq k \leq 6,\ P(X=k) = \alpha k)$. On a aussi $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

1) i) On a $\sum_{k=1}^{6} P(X=k) = 1 \Rightarrow \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{6} k}_{\frac{6(6+1)}{2}=21} = 1$, donc $\boxed{\alpha = \frac{1}{21}}$

Loi de X : On a $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $\left(\forall 1 \leq k \leq 6,\ P(X=k) = \frac{k}{21}\right)$

ii) $\boxed{E(X)} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{6} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \boxed{\frac{91}{2}}$

Rappel : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) i) $\boxed{Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{k} \ / \ 1 \leq k \leq 6 \right\}}$, car $Y = \frac{1}{X}$ et $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$

Et $\forall 1 \leq k \leq 6,\ P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X=k) = \frac{k}{21}$

ii) $E(Y) = E\left(\frac{1}{X}\right) \overset{\text{Formule de transfert}}{=} \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} \underbrace{P(X=k)}_{=\frac{k}{21}} = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Fin