CONCOURS COMMUN 2003

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Premier problème

CORRECTION

I. Quelques résultats préliminaires

1) Soient $x \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sin\frac{x}{2}f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin(\left(n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{(somme télescopique)}$$

Maintenant, si $x \in]0,\pi]$, $\frac{x}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}]$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,\pi],\ f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x).}$$

2) **a)** Pour tout réel $x \in]0,\pi]$, on a $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ et donc g_n est continue sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi]$.

De plus, quand x tend vers 0, $g_n(x) = 2f_n(x)+1$ tend vers le réel $2n+1$. Donc, g_n se prolonge par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 2n+1$. La fonc tion g_n ainsi définie est continue sur $[0,\pi]$ (pour tout réel x de $[0,\pi]$, $g_n(x) = 2f_n(x)+1$).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_0^\pi g_n(x)\ dx = 2\int_0^\pi f_n(x)\ dx + \int_0^\pi\ dx$$
$$= \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(kx)\ dx = \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi$$
$$= \pi$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi g_n(x)\ dx = \pi.}$$

3) **a)**

$$g(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0, x>0}{\sim} \frac{-x^2/(2\alpha^2)}{x/2} = -\frac{x}{\alpha^2}.$$

En particulier, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0 = g(0)$. On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

b) g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi]$. De plus, pour $x \in]0,\pi]$, on a

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1\right).\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Or, quand x tend vers 0,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1\right).\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= -\frac{1}{\alpha}(\frac{x}{\alpha} + o(x))(\frac{x}{2} + o(x)) - (-\frac{x^2}{2\alpha^2} + o(x^2))\frac{1}{2}(1 + o(1)) \\
&= -\frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^2}{4\alpha^2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{4\alpha^2} + o(x^2) \\
&\sim -\frac{x^2}{4\alpha^2},
\end{aligned}$$

et donc $g'(x) \sim \dfrac{-x^2/(4\alpha^2)}{x^2/4} = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = -\frac{1}{\alpha^2}.}$$

c) En résumé,
- g est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ d'après b),
- g est de plus continue sur $[0,\pi]$ d'après a),
- g' a une limite réelle quand x tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse,

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

En particulier, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'_\alpha(x) == -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

$$\boxed{g'(0) = -\frac{1}{\alpha^2}.}$$

II. Etude d'une suite

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction g et la fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\dfrac{x}{2}\right)$ sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
v_n &= \left[-\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g'(x)\,dx \\
&= \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g'(x)\,dx \quad \left(\text{car } g(0) = 0 \text{ et } \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$|v_n| \leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \left|\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)g'(x)\right|\,dx \leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |g'(x)|\,dx.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq \frac{A}{2n+1} \text{ où } A = 2\int_0^\pi |g'(x)|\,dx.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g_n(x)\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad \text{(d'après la question 1))} \\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)+\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}g_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi]$,

$$f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}g_n(x).$$

Cette dernière égalité reste valable quand $x = 0$ par continuité des fonctions f_n, g_n et g en 0. On peut alors intégrer sur l'intervalle $[0, \pi]$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi g_n(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\alpha\sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]_0^\pi+\frac{1}{2}v_n+\frac{\pi}{2} \quad \text{(d'après la question 2)b))} \\
&= -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}v_n+\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)+\frac{1}{2}v_n+\frac{\pi}{2}.}$$

D'après la question 4), v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite (X_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)+\frac{\pi}{2}.}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
X_n &= \int_0^\pi f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left[\cos\left((k+\frac{1}{\alpha})x\right)+\cos\left((k-\frac{1}{\alpha})x\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\left(k+\frac{1}{\alpha}\right)}\sin\left((k+\frac{1}{\alpha})x\right)+\frac{1}{\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)}\sin\left((k-\frac{1}{\alpha})x\right)\right]_0^\pi \\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}+k\pi\right)-\frac{1}{k\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}-k\pi\right)\right] \\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k\alpha+1}(-1)^k\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)-\frac{1}{k\alpha-1}(-1)^k\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right] \\
&= \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^n (-1)^k\left[\frac{1}{k\alpha+1}-\frac{1}{k\alpha-1}\right]
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{k\alpha+1}-\frac{1}{k\alpha-1}\right],}$$

et donc aussi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{k\alpha+1}-\frac{1}{k\alpha-1}\right]\right) = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)+\frac{\pi}{2}.}$$

III. Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

7) **a)** Puisque $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{1+t^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$. Maintenant, puisque $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et positive. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc que

$$\boxed{I(\alpha) \text{ existe.}}$$

b) Puisque $\alpha > 1$, on a $0 < \beta < 1$.

• φ est continue sur $]0,1]$, positive et équivalente en 0 à $t^{\beta-1}$ qui est intégrable sur un voisinage de 0 car $\beta - 1 > -1$. Donc, φ est intégrable sur $]0,1]$.

• ψ est continue sur $]0,1]$, positive et équivalente en 0 à $t^{-\beta}$ qui est intégrable sur un voisinage de 0 car $-\beta > -1$. Donc, ψ est intégrable sur $]0,1]$.

$$\boxed{\varphi \text{ et } \psi \text{ sont intégrables sur }]0,1].}$$

8) **a)** Soit $a \in]0,1[$. On pose $t = x^\alpha$ et donc $x = t^{1/\alpha} = t^\beta$ puis $dx = \beta t^{\beta-1}dt$. On obtient

$$\int_a^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \int_{a^\alpha}^1 \frac{1}{1+t}\beta t^{\beta-1}\,dt = \beta\int_{a^\alpha}^1 \varphi(t)\,dt.$$

Quand a tend vers 0, a^α tend vers 0 et donc, les fonctions φ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ étant intégrables sur $]0,1]$, quand a tend vers 0, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \beta J(\beta).}$$

b) Soit $A > 1$. On pose $t = x^{-\alpha}$ et donc $x = t^{-1/\alpha} = t^{-\beta}$ puis $dx = -\beta t^{-\beta-1}dt$. On obtient

$$\int_1^A \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \int_1^{A^{-\alpha}} \frac{1}{1+t^{-1}}(-\beta t^{\beta-1})\,dt = \beta\int_{A^{-\alpha}}^1 \frac{t^{-\beta}}{1+t}\,dt = \beta\int_{A^{-\alpha}}^1 \psi(t)\,dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, $A^{-\alpha}$ tend vers 0 et donc, la fonction ψ étant intégrable sur $]0,1]$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha}\,dx = \beta K(\beta).}$$

Par la relation de Chasles, on a encore

$$\boxed{I(\alpha) = \beta(J(\beta)+K(\beta)).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

9) **a)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$.

$$\left|\sigma_n(t) - \frac{1}{1+t}\right| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} - \frac{1}{1+t}\right| = \frac{|(-1)^n t^{n+1}|}{1+t} = \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}.$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1]$. On a

$$|\sigma_n(t)| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \frac{|1-(-t)^{n+1}|}{1+t} \leq \frac{1+|(-t)^{n+1}|}{1+t} = \frac{1+t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t},$$

et donc

$$|\varphi_n(t)| = t^{\beta-1}\,|\sigma_n(t)| \leq 2\frac{t^{\beta-1}}{1+t} = 2\varphi(t),$$

et

$$|\psi_n(t)| = t^{-\beta}\,|\sigma_n(t)| \leq 2\frac{t^{-\beta}}{1+t} = 2\psi(t).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,1],\ |\varphi_n(t)| \leq 2\varphi(t) \text{ et } |\psi_n(t)| \leq 2\psi(t).}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions φ_n et ψ_n sont continues sur $]0,1]$. De plus, d'après la question précédente, $|\varphi_n| \leq 2\varphi$ et $|\psi_n| \leq 2\psi$. Les fonctions 2φ et 2ψ étant intégrables sur $]0,1]$ d'après la question 7)b), on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n \text{ et } \psi_n \text{ sont intégrables sur }]0,1].}$$

10) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 9)a), on a

$$|J_n(\beta) - J(\beta)| = \int_0^1 \left|\sigma_n(t) - \frac{1}{1+t}\right| t^{\beta-1}\ dt \leq \int_0^1 t^{n+1}t^{\beta-1}\ dt = \int_0^1 t^{n+\beta}\ dt = \frac{1}{n+\beta+1}.$$

et de même

$$|K_n(\beta) - K(\beta)| = \int_0^1 \left|\sigma_{n-1}(t) - \frac{1}{1+t}\right| t^{-\beta}\ dt \leq \int_0^1 t^n t^{-\beta}\ dt = \int_0^1 t^{n-\beta}\ dt = \frac{1}{n-\beta+1}\ (0 < \beta < 1 \text{ fournit } 0 < 1-\beta < 1).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n+\beta+1}$ et $\dfrac{1}{n-\beta+1}$ tendent vers 0 et on a donc montré que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n(\beta) = J(\beta) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} K_n(\beta) = K(\beta).}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
J_n(\beta) + K_n(\beta) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right) t^{\beta-1}\ dt + \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k\right) t^{-\beta}\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{k+\beta-1}\ dt + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 t^{k-\beta}\ dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+\beta} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k-\beta+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k+\frac{1}{\alpha}} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k-\frac{1}{\alpha}+1} = \alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{1+k\alpha} - \alpha\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{1-\alpha(k+1)} \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{1+k\alpha} - \alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{1}{1-\alpha k} = \alpha + \alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \left[\frac{1}{1+k\alpha} + \frac{1}{1-\alpha k}\right] \\
&= \alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} X_n \text{ (d'après la question 6)).}
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n(\beta) + K_n(\beta) = \alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} X_n.}$$

c) D'après les questions 8), 10)a), 10)b) puis 5)

$$\begin{aligned}
I(\alpha) = \beta(J(\beta) + K(\beta)) &= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \to +\infty} (J_n(\beta) + K_n(\beta)) \\
&= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \to +\infty} \left(\alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} X_n \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha + \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \left(-\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&= \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall \alpha > 1,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^\alpha}\, dt = I(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.}$$

FIN

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.