

EPREUVE DES PETITES MINES, COMMUNE, 1995

EXTRAIT

Problème 1

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

Notations : Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I , dont la dérivée f' est continue sur I .

Partie I

1. On définit la fonction φ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0$$

- (a) i. Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
ii. En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.
(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
(c) Soit ψ la fonction définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$\psi(t) = \frac{t}{\sin t} \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_a^b g(t) \sin(\lambda t) \, dt$$

tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par :

$$S_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$$

- (a) i. Montrer, *sans récurrence*, que :

$$\forall t \in]0, \pi[\quad S_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$$

- ii. Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

- (b) Calculer la valeur de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \, dt$$

Partie II

1. (a) Déterminer la limite de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) \, dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- (b) En déduire la limite de :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \, dt$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) i. Vérifier que la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$$

- ii. Comparer $F((2n+1)\pi/2)$ et I_n .

- (b) i. Soit x un réel, $x \geq \pi/2$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x), tel que :

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} \leq x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$$

On note $\alpha(x) = (2n+1)\pi/2$.

ii. Montrer que :

$$\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t} dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) En déduire que $F(x)$ admet une limite l si x tend vers $+\infty$. Préciser l .

3. (a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que :

$$\left| \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{x}$$

(On effectuera une intégration par parties).

(b) En déduire que :

$$\forall x > 0 \quad |l - F(x)| \leq \frac{2}{x}$$

Partie III

1. (a) Déterminer deux réels α et β , indépendants de n , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

α et β sont désormais ainsi fixés.

(b) En déduire que :

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

est un réel indépendant de n , que l'on précisera.

(c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par :

$$h(t) = \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2. On définit les suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (n \geq 1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (n \geq 0)$$

(a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite.

(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

FIN EXTRAIT

