Q)

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, d \right) = ?$$

Q)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n\, d\right) = ?$$

Rép

On pense à :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n\, dt\right) = \int_0^{\pi/4}\left(\lim_{n\to+\infty}(\tan t)^n\right) dt$$

Quelle partie du programme appliquera-t-on ?

Posons : $\begin{cases} f_n(t) = (\tan t)^n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, \pi/4] \end{cases}$

Piste 1

Chap : « Suites, séries de fcts »

On a $\lim_n \int_0^{\pi/4} f_n(t)\,dt = \int_0^{\pi/4} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt$

quand :
1) $\forall n$, f_n continue sur $[0, \pi/4]$
2) $(f_n)_n$ CU sur $[0, \pi/4]$

1) OK

2) i) $f_n \xrightarrow[{[0,\pi/4]}]{CS} f$, où :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } t = \pi/4 \end{cases}$$

Si ii) (f_n) CU f sur $[0, \pi/4]$?

Or $\begin{cases} f \text{ n'est pas continue sur } [0, \pi/4]. \\ \forall n, f_n \text{ continue sur } [0, \pi/4] \end{cases}$

Alors (f_n) ne converge pas unif sur $[0, \pi/4]$.

Cette piste n'aboutit pas