

Calcul différentiel

Résumé

Tous les espaces vectoriels qu'on envisagera seront réels et de dimensions finies.

I) Différentiabilité – Dérivabilité selon un vecteur

1) Dérivée selon un vecteur

Ici:

E et F deux $\mathbb{R}$ -esp. vectoriels de dimensions finies.

U est un ouvert de E .

Déf 1

Soit $f: U \rightarrow F$.

Soient $a \in U$ et v un vecteur non nul de E .

On dit que f est dérivable en a selon le vecteur v si et seulement si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0 .

Dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$ se note $D_v f(a)$ et s'appelle la dérivée de f en a selon v .

NB:

$$\text{par déf} \\ \mathcal{D}_v f(a) \stackrel{(\tau)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

2) Dérivées partielles

ICI :

$$f: UCE \longrightarrow F$$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ une base (fixée) de E .

Supposons que f est dérivable en a selon e_i .

$\longrightarrow \mathcal{D}_{e_i} f(a)$ se note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (ou $\mathcal{D}_i f(a)$)

$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in F$, et s'appelle la i ème dérivée partielle de f en a .

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \stackrel{\text{par déf}}{=} \mathcal{D}_{e_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

NB 1: Cas où $f: \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{U}$.

$(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1) f possède une dérivée partielle i ème en a si et seulement si

$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est dérivable en 0.

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t}$$

NB 2: Cas où $f: \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a, b) \in \mathbb{U}$.

1) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b)$ se note $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b)$ se note $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

3) Différentiabilité en un point — Différentielle

$$\text{ICI : } f : U \subset E \longrightarrow F.$$

Déf 1 :

Soit $a \in U$.

f est dite **différentiable** en a si et ss'il existe une application linéaire $l \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

$$\text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

NB :

1) On écrit $f(a+h) = f(a) + l(h) + o(h)$

2) Chacune de ces deux écritures s'appelle le **développement limité** de f à l'ordre 1 au voisinage de a .

Prop 2 :

On a l'unicité de l'application linéaire $l \in \mathcal{L}(E, F)$.

Déf 3 :

Soit f différentiable en a .

L'application ℓ ci-dessus s'appelle la différentielle de f en a , et se note $df(a)$.

NB :

1) $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.

2) On a : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a)(h) + o(h)$

Prop 4 :

$$(f \text{ différentiable en } a) \Rightarrow (f \text{ continue en } a)$$

Prop 5 :

Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E \setminus \{0\}$, et on a :

$$D_v f(a) = df(a)(v)$$

Déf 6:

Soit $f: U \subseteq E \longrightarrow F$.

1) f est différentiable sur U si et ss si f est différentiable en tout point de U .

2) Supposons que f est différentiable sur U .

La différentielle de f est l'application notée df et définie par:

$$\begin{array}{ccc} df: U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ a & \longmapsto & df(a) \end{array}$$

Prop 7:

1) Toute fonction constante f sur U est différentiable, et on a:

$$\forall a \in U, df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$$

2) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est différentiable sur E , et on a:

$$\forall a \in E, df(a) = f$$

4) Lien entre différentiabilité et dérivées partielles

Prop 1 :

Soient $f: LCE \rightarrow F$ et $B=(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Si f est différentiable sur L alors les dérivées partielles de f existent sur L , et on a :

$$\forall a \in E, \forall i \in [1, n], \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i)$$

Prop 2 :

Soient $f: LCE \rightarrow F$ et $B=(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Supposons que f est différentiable en a . On a :

$$1) df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) ; \text{ où } h = \sum_{i=1}^n h_i e_i.$$

2) Le développement limité de f en a à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(h)$$

5) Cas d'une fonction vectorielle à variable réelle

Prop 1 :

Soit $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$, où I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $a \in I$. On a :

1) $(f \text{ est différentiable en } a) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable en } a)$.

2) Dans ce cas, on a :

$$f'(a) = df(a)(1)$$

6) Matrice jacobienne

ICI

→ $f: U \subset E \longrightarrow F$, et $a \in U$.

→ $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

→ $S = (s_1, \dots, s_m)$ base de F .

→ $f_1, \dots, f_m$ les applications composantes de f , dans la base S ; c-à-d $f = \sum_{i=1}^m f_i s_i$.

→ $\forall 1 \leq i \leq m, f_i: U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$

Prop 1 :

1) f est différentiable en a (resp sur U) si et seulement si toutes ses fonctions composantes le sont.

2) Auquel cas on a :

$$df(a) = \sum_{i=1}^m df_i(a) S_i$$

Càd :

$$\forall h \in E, df(a)(h) = \sum_{i=1}^m \left(df_i(a)(h) \right) S_i$$

Déf 2 (Matrice jacobienne)

Supposons que f est différentiable en a .

La matrice jacobienne de f en a , est la matrice notée $Jf(a)$, et définie par :

$$Jf(a) = \text{mat}_{B,S} \left(df(a) \right)$$

Prop 3

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ligne
colonne

NB

Quand $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne est relativement aux bases Canoniques. (Par défaut)

7) Opérations sur les fonctions différentiables

a) Combinaison linéaire

Prop 1 :

1) Soient $f, g: U \subset E \longrightarrow F$, $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont différentiables en a (resp sur U) alors

$(\lambda f + g)$ l'est aussi, et on a :

$$d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$$

2) En général, toute combinaison linéaire d'applications différentiables sur U est une application différentiable sur U .

Et on a :

$$\forall a \in U, d\left(\sum_i \lambda_i f_i\right)(a) = \sum_i \lambda_i df_i(a)$$

b) Produit

ICI

→ E, F, G et H des $\mathbb{R}$ -esp vect de dim finies.

→ $f: U \subset E \longrightarrow F$, et $a \in U$.

→ $g: U \subset E \longrightarrow G$

→ $B: F \times G \longrightarrow H$ application bilinéaire.

→ $B(f, g): U \subset E \longrightarrow H$
 $x \longmapsto B(\underbrace{f(x)}_{\in F}, \underbrace{g(x)}_{\in G}) \in H$

Prop 1 :

Si f et g sont différentiables sur U , alors $B(f, g)$ l'est aussi.

Et on aura :

$$\forall a \in U, \underbrace{dB(f, g)(a)}_{\in \mathcal{L}(E, H)} = B(\underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E, F)}, g(a)) + B(f(a), \underbrace{dg(a)}_{\in \mathcal{L}(E, G)})$$

Càd :

$$\forall a \in U, \forall h \in E, \underbrace{dB(f, g)(a)(h)}_{\in H} = B(\underbrace{df(a)(h)}_{\in F}, \underbrace{g(a)}_{\in G}) + B(\underbrace{f(a)}_{\in F}, \underbrace{dg(a)(h)}_{\in G})$$

Corollaire 2

Soit $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ une algèbre normée de dimension finie.

Soient $f: UCE \rightarrow \mathcal{A}$ et $g: UCE \rightarrow \mathcal{A}$.

Si f et g sont différentiables sur U alors $f \times g$ l'est aussi.

Et on a :

$$\forall a \in U, d(f \times g)(a) = df(a) \times g(a) + f(a) \times dg(a)$$

càd

$$\forall a \in U, \forall h \in E, \underbrace{(d(f \times g)(a))(h)}_{\in \mathcal{A}} = \underbrace{df(a)(h)}_{\in \mathcal{A}} \times \underbrace{g(a)}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{f(a)}_{\in \mathcal{A}} \times \underbrace{dg(a)(h)}_{\in \mathcal{A}}$$

NB :

Pensez aux algèbres $\mathbb{R}$ et $M_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 3

⚡!

Toute fonction polynomiale en les composantes des vecteurs est différentiable.

c) Composée

Prop 1

Supposons que :

$$\left| \begin{array}{l} f: U \subset E \longrightarrow F \\ g: W \subset F \longrightarrow G \\ f(U) \subset W \end{array} \right.$$

Si

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est différentiable sur } U \\ g \text{ est différentiable sur } W \end{array} \right.$$

Alors

$$(g \circ f) \text{ est différentiable sur } U, \text{ et qu'on a :}$$
$$\forall a \in U, \quad d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Corollaire 2

Supposons que :

$$\left| \begin{array}{l} f: U \subset E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(U) \subset I \end{array} \right.$$

Si

$$\left| \begin{array}{l} f \text{ est différentiable sur } U \\ \varphi \text{ est dérivable sur } I \end{array} \right.$$

Alors

$$(\varphi \circ f) \text{ est différentiable sur } U, \text{ et qu'on a :}$$

$$\forall a \in U, \quad d(\varphi \circ f)(a) = \varphi'(f(a)) \cdot df(a)$$

Càd

$$\forall a \in U, \forall h \in E, \quad d(\varphi \circ f)(a)(h) = \varphi'(f(a)) \cdot df(a)(h)$$

Corollaire 3

Supposons que :

$$\begin{cases} \gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E \\ f: U \subset E \longrightarrow F \\ \gamma(I) \subset U \end{cases}$$

Si γ est dérivable sur I
 f est différentiable sur U

Alors $(f \circ \gamma)$ est dérivable sur I , et qu'on a :

$$\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{df(\gamma(t))}_{\in \mathcal{L}(E, F)} \underbrace{(\gamma'(t))}_{\in E}$$

Prop 4 :

Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$
 $\rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, u_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $\rightarrow g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto g(t) = f(u_1(t), \dots, u_n(t))$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(t) = u_1'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1(t), \dots, u_n(t)) + \dots + u_n'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(u_1(t), \dots, u_n(t))$$

8°) Dérivées partielles d'une composée d'applications - Règle de la Chaîne

ICI

→ $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur Ω .

(On parlera des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$.)

→ $\forall 1 \leq i \leq n$, $x_i: \Omega' \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur Ω' .

(On parlera des $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, pour tout $1 \leq j \leq m$.)

→ $\forall (t_1, \dots, t_m) \in \Omega'$, $(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \in \Omega$.

Prop : (Règle de la Chaîne)

Soient $(t_1, \dots, t_m) \in \Omega'$ et $1 \leq i \leq m$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \left(f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \right) =$$

$$\frac{\partial x_1(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) + \dots +$$

$$\frac{\partial x_n(t_1, \dots, t_m)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m))$$

Càd

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \left(f(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, \dots, t_m)) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_m)$$

Remarque pratique

On retient cette égalité sous la forme suivante :



$$\frac{\partial}{\partial t_i} (f(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

règle de la chaîne

II) Cas des applications numériques

Ici $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1) Gradient

Prop et def 1

Soit $a \in \Omega$. Soit $f: \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a .

1) Il existe un unique vecteur, noté $\nabla f(a)$, tel que :

$$df(a) = \langle \nabla f(a), \cdot \rangle$$

2) $\nabla f(a)$ s'appelle le gradient de f en a .

NB

$$\forall x \in E, \quad df(a)(x) = \langle \nabla f(a), x \rangle$$

Prop 2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de E . Soit $a \in \Omega$.

Soit $f: \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a .

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot e_i$$

Cas particulier

1) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

2) Dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Prop 3 :

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une bon de E . Soit $a \in \Omega$.

Soit $f: \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $df(a) = 0$

2) $\nabla f(a) = 0$

3) $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

NB

Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a .

Le DL d'ordre 1 de f en a est :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + o(h)$$

2) Points Critiques — Extremums globaux

Déf 1

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diff en $a \in \Omega$.

a est dit **point critique** de f si et si $df(a) = 0$.

NB :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) a point critique de f
 - 2) $df(a) = 0$
 - 3) $\nabla f(a) = 0$
 - 4) $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$
-

NB



Pour $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$(x, y) \text{ point critique de } f \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right)$$

Déf 2:

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

1) i) f admet un **maximum global** en a si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, f(x) \leq f(a)$$

ii) f admet un **minimum global** en a si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, f(x) \geq f(a)$$

2) i) f admet un **maximum local** en a si et seulement si :

$$\exists r > 0, \forall x \in \Omega \cap B(a, r), f(x) \leq f(a)$$

ii) f admet un **minimum local** en a si et seulement si :

$$\exists r > 0, \forall x \in \Omega \cap B(a, r), f(x) \geq f(a)$$

- 3) i) f admet un **extremum local** en a si et seulement si
 f admet un maximum ou minimum local en a .
- ii) Idem pour **extremum global** en a .

- 4) i) f admet un **maximum local strict** en a si et seulement si

$$\exists r > 0, \forall x \in (\Omega \cap B(a, r)) \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$$

- ii) f admet un **minimum local strict** en a si et seulement si

$$\exists r > 0, \forall x \in (\Omega \cap B(a, r)) \setminus \{a\}, f(x) > f(a)$$

Prop 3

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diff en $a \in \Omega$.

Si f admet un **extremum local** en a alors a est un point

Critique de f .

Remarque pratique

Grâce à la (prop 3), pour chercher les extremums locaux ou globaux, on les cherche parmi les points critiques.

III) Fonctions de classe C^1 — Équations aux dérivées partielles

1) Fonctions de classe C^1

Déf 1:

$$f: \Omega \subset E \rightarrow F.$$

f est dite de classe C^1 sur Ω si et si f est différentiable sur Ω et que sa différentielle df est continue sur Ω .

Prop 2

$$\text{Soit } f: \Omega \subset E \rightarrow F.$$

f est de classe C^1 sur Ω si et si toutes ses dérivées partielles existent sur Ω et y sont continues.

NB

1) Les résultats relatifs aux opérations sur les fonctions différentiables valent aussi pour les fonctions de classe C^1 (Composition, Combinaison linéaire, produit ...)

2) Toute fonction polynomiale en les coordonnées est de classe C^1 .

Prop 3

1) $f: \Omega \subset E \rightarrow F$ de classe C^1 sur Ω .

Si

2) $a, b \in \Omega$

3) $\gamma: [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, un arc de classe C^1 inscrit dans Ω et vérifiant $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$.

Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} df(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt = f(b) - f(a)$$

Corollaire 3

Soit $f: \Omega \subset E \rightarrow F$ de classe C^1 , où Ω un ouvert connexe par arcs de E . On a:

$$f \text{ est constante} \iff df=0$$

2) Les équations aux dérivées partielles du premier ordre

Prop 1

I et J intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

1) La solution générale de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ est

$$f(x,y) = C(y)$$

où $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

2) Idem pour l'EDP $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

IV) Fonctions de classe C^k

1) Fonctions de classe C^2

$$f: \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$$

$(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

→ Supposons que les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existent sur Ω .

→ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

Supposons que les dérivées partielles premières de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur Ω .

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \text{ se note } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \text{ se note } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \end{cases}$$

→ Les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ s'appellent les dérivées partielles secondes de f .

Par exemple

Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Déf 1:

$f: \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et B une base de E ,

f est dite de classe C^2 sur Ω si et seulement si toutes les dérivées partielles secondes de f existent et sont continues sur Ω .

Prop 2 (Théorème de Schwarz)

Si $f: \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur Ω alors:

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

2) Fonction de classe C^k

→ On définit de même les dérivées k èmes, pour tout $k \geq 3$.

→ Une fonction est dite de classe C^k si toutes ses dérivées partielles k èmes existent et sont continues.

→ Les propriétés sur les fonctions de classe C^k sont les mêmes que celles des fonctions de classe C^1 déjà citées.

→ Les fonctions polynomiales sont en conséquence de classe C^k .

3) Développement limité d'ordre 2

Prop :

Soient $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $a \in \Omega$.

On a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

$$\text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

NB

1) $\|h\|^2 \varepsilon(h)$ s'écrit aussi $o(\|h\|^2)$.

2) L'écriture ci-dessus s'écrit alors :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) + o(\|h\|^2)$$

Elle s'appelle le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de a , et se note $DL_2(a)$.

Cas de dim 2

Soient $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in \mathbb{R}^2$.

En notant $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2 \right) + o(\|h\|^2)$$

Car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$, d'après Schwarz.

4) Les EDP de second ordre

Prop :

Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

1) $\forall (x, y) \in \Omega$. On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 \iff f(x, y) = C(y) \cdot x + D(y)$$

Où C et $D \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) $\forall (x, y) \in \Omega$. On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \iff f(x, y) = C(x) \cdot y + D(x)$$

Où C et $D \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3) $\forall (x,y) \in \Omega$. On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \iff f(x,y) = C(x) + D(y)$$

Où C et $D \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

NB

Il faut savoir retrouver ces équivalences ; Comme ci-après :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = C(y)$$

$$\iff f(x,y) = C(y) \cdot x + D(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = C(x)$$

$$\iff f(x,y) = D(x) + A(y)$$

V) Matrices hessiennes et extremums locaux

Déf 1 :

Soient $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $a \in \Omega$.

La matrice hessienne de f en a est :

$$H(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$$

$i^{\text{ème}} \text{ ligne} \longleftarrow$ $\longrightarrow j^{\text{ème}} \text{ colonne}$

NB

Les matrices hessiennes sont symétriques réelles, donc diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$

Prop 2

Soient $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $a \in \Omega$.

On a :

$$1) \quad f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) + o(\|h\|^2)$$

$$2) \quad f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + {}^t \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \left({}^t h \cdot H_f(a) \cdot h \right) + o(\|h\|^2)$$

Prop 3

Soient $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $a \in \Omega$.

1) Si f admet un minimum local en a , alors :

i) a est un point critique de f .

ii) $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

iii) $\forall \lambda \in S_p(H_f(a)), \lambda \geq 0$

2) Si f admet un maximum local en a , alors :

i) a est un point critique de f .

ii) $(-H_f(a)) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

iii) $\forall \lambda \in S_p(H_f(a)), \lambda \leq 0$

NB

Un point critique qui ne représente pas un extremum local de f est dit point col (ou point selle) de f .

Prop 4

Soient $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $a \in \Omega$.

i) a est un point critique de f .

1) Si ii) $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$; Càd que toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives.

Alors f admet un minimum local strict en a

i) a est un point critique de f .

2) Si ii) $(-H_f(a)) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$; Càd que toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives.

Alors f admet un maximum local strict en a

3) S'il existe au moins deux valeurs propres de $H_f(a)$ l'une est strictement positive et l'autre est strictement négative

Alors a est un point col (on dit aussi point selle)

Corollaire 5

Soient $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $a \in \mathbb{R}^2$ un point critique de f .

Notations de Monge:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

$$\text{On a } H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Notons $\Delta = \det(H_f(a))$; C à d $\Delta = rt - s^2$

1) Si $\Delta > 0$ alors f admet un **extremum local** en a .

i) Si $\text{Tr}(H_f(a)) = r+t > 0$

Alors f admet un **minimum local** en a

ii) Si $\text{Tr}(H_f(a)) = r+t < 0$

Alors f admet un **maximum local** en a

2) Si $\Delta < 0$ alors a est un **point Col**.

3) Si $\Delta = 0$, on ne peut rien conclure.

VI) Vecteurs tangents à une partie

Déf 1 (Vecteur tangent)

Soient $A \subseteq E$, $a \in A$ et $v \in E$.

v est dit **vecteur tangent** à A si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow A$, dérivable en 0 telle que :

$$\gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = v$$

Déf 2 (Surface d'une fonction)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La **surface représentative** de la fonction f est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$z = f(x, y)$$

Déf 3 (Plan tangent à une surface)

Soit S une surface d'équation : $(z = f(x, y))$; où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Supposons que f est différentiable en (x_0, y_0) .

Le **plan tangent** à S en (x_0, y_0, z_0) est le plan d'équation :

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Cad :

$$\tilde{z} = df(x_0, y_0) \left((x, y) - (x_0, y_0) \right) + f(x_0, y_0)$$

Déf 4 (Ligne de niveau)

Soit $f: U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $c \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $\{x \in U / f(x) = c\}$ s'appelle la ligne de niveau de f d'équation " $f(x) = c$ ".

NB

1) Si $\dim(E) = 3$.

On parle de surface de niveau c .

2) Si $\dim(E) = 2$.

On parle de courbe de niveau c .

Prop 5

Soit E un espace euclidien.

Soit $f: \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur Ω .

Soient A une ligne de niveau de f et $a \in A$.

Les vecteurs tangents à A en a sont orthogonaux au gradient $\nabla f(a)$.