Suites et Séries de Fonctions

I) Modes de Convergences d'une Suite de Fonctions

Définition 1 : (Convergence simple)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si et seulement si

$$\forall x \in X, \ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Vocabulaire : f est dite la *limite simple* de la suite $(f_n)_n$ sur X.

Définition 2 : (Convergence uniforme)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformement vers f sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \succeq N, \ \forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \preceq \varepsilon$$

Vocabulaire : f est dite la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_n$ sur X.

Proposition 3 :
Si $(f_n)_n$ *converge uniformement* vers f sur X
alors $(f_n)_n$ *converge simplement* vers f sur X.
Attention ! : La réciproque est en général fausse.

Proposition 4 :
Supposons que f et les $(f_n)_n$ sont bornées sur X. On a :

$$(f_n)_n \ \textit{converge uniformement vers } f \textit{ sur } X \ \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \parallel f_n - f \parallel_\infty = 0$$

Proposition 5 :
S'il existe une suite positive $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{cases} \textbf{1)} \ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \\ \textbf{2)} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X, \ \parallel f_n(x) - f(x) \parallel \preceq \alpha_n \end{cases}$$

alors $(f_n)_n$ *converge uniformement* vers f sur X.

II) Modes de Convergences d'une Série de Fonctions

1) Convergence Simple et Convergence Absolue

Définition 1 : (Convergence simple)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur X si et seulement si la

suite de fonction $(S_n)_n$ converge simplement sur X.

où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Proposition 2 :

La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur X si et seulement si pour tout $x \in X$, la série $\sum_n f_n(x)$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas, la limite simple de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ est la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Proposition 3 :

Supposons que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur X, et notons S sa fonction somme.

On rappelle que $(\forall x \in X,\ S(x) = S_n(x) + R_n(x))$; où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

La suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers 0.

Définition 4 : (Convergence absolue)

La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument sur X si et seulement si pour tout $x \in X$, la série $\sum_n \| f_n(x) \|$ converge .

Proposition 5 :

Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ *converge absolument* sur X **alors** elle *converge simplement* sur X.

2) Convergence Uniforme

Définition 1 : (Convergence uniforme)

Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonction $(S_n)_n$ converge uniformément sur X.

où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Proposition 2 :

$$\sum_n f_n \text{ converge uniformément sur X} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{1)}\ \sum_n f_n \ \textit{converge simplement sur } X \\ \textbf{2)}\ (R_n)_n \ \textit{converge uniformement ver } 0 \textit{ sur } X \end{cases}$$

3) Convergence Normale

Définition 1 : (Convergence normale)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
Les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X si et seulement si :

$$\begin{cases} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ est\ bornee\ sur\ X. \\ \textbf{2)}\ La\ serie\ positive\ \sum_n \parallel f_n \parallel_\infty\ \ converge \end{cases}$$

Proposition 2 :
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
Les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\left(\begin{array}{l} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in\ X,\ \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n\ converge \end{array} \right)$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Proposition 3 :

1) $\left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{normalement}\ sur\ X \right) \Rightarrow \left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{uniformement}\ sur\ X \right)$

2) $\left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{normalement}\ sur\ X \right) \Rightarrow \left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{absolument}\ sur\ X \right)$

III) Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

1) Intervertion de limites

Théorème 1 :(intervertion des limites)
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.
Soit $a \in \overline{X}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ La\ suite\ (l_n)\ converge \\ 2)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \end{cases}$

Théorème 2 :(Intervertion d'une limite et d'une somme)
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.
Soit $a \in \overline{X}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ \sum_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ \textit{La serie } \sum l_n \textit{ converge} \\ 2)\ \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)\right) \end{cases}$

Théorème 3 : (intervertion des limites) (*Adaptation au cas de* $a = \pm\infty$)
E=$\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie. X un intervalle de $\mathbb{R}$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ \textit{La suite } (l_n) \textit{ converge} \\ 2)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \end{cases}$

Théorème 4 : (Intervertion d'une limite et d'une somme)(*Adaptation au cas de* $a = \pm\infty$)
E=$\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie. X un intervalle de $\mathbb{R}$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

A) Supposons que X est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

B) Supposons que X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\lim_{x\to-\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to-\infty} f_n(x)$

2) Continuité

Théorème 1 :
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E. Soit $a \in X$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

A) Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ est\ continue\ en\ a \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ X \end{pmatrix}$ **Alors** (f est continue en a)

B) Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ est\ continue\ sur\ X \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ X \end{pmatrix}$ **Alors** (f est continue sur X)

Théorème 2 :
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \ \textit{est continue sur } X \\ 2)\ \displaystyle\sum_n f_n \ \textit{CU sur } X \end{pmatrix} \ \textbf{Alors}\ (S \text{ est continue sur } X)$$

avec $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.

NB : Des fois la convergence uniforme est délicate à établir sur X ; on utilse alors le résultat suivant :

Corollaire 3 :
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \ \textit{est continue sur } X \\ 2)\ \displaystyle\sum_n f_n \ \textit{CU sur tout compact de } X \end{pmatrix} \ \textbf{Alors}\ (S \text{ est continue sur } X)$$

NB : Si on est dans $\mathbb{R}$, on montre la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de X.

3) Intégration terme à terme

Théorème 1 : (Intervertion de limite et intégrale))
$[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur $[a, b]$ à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \ \textit{est continue sur } [a,b] \\ 2)\ (f_n) \ \textit{CU vers } f \textit{ sur } [a,b] \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Alors}\ \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$$

Corollaire 2 : (Intervertion de $\sum$ et $\int$))
$[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur $[a, b]$ à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \ \textit{est continue sur } [a,b] \\ 2)\ \displaystyle\sum_n f_n \ \textit{CU sur } [a,b] \end{pmatrix} \ \textbf{Alors}\ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$$

4) Dérivation

Théorème 1 :
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \ \textit{est de classe } C^1 \textit{ sur } I \\ 2)\ (f_n) \ \textit{CS vers } f \textit{ sur } I \\ 3)\ (f_n') \ \textit{CU vers } h \textit{ sur tout segment } [a,b] \textit{ de } I \end{pmatrix}$$

Alors $\begin{pmatrix} 1) \ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ 2) \ (\lim_{n\to+\infty} f_n)' = \lim_{n\to+\infty}(f_n') \text{ cad } f' = h \\ 3) \ (f_n) \ CU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } I \end{pmatrix}$

Corollaire 2 : (Dérivation terme à terme)

I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.

f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F.

Si $\begin{pmatrix} 1) \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ 2) \ \sum_n f_n \ CS \text{ sur } I \\ 3) \ \sum_n f_n' \ CU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } I \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 1) \ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ 2) \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n' \\ 3) \ \sum_n f_n \ CU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } I \end{pmatrix}$

Corollaire 3 : (Classe C^k)

I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.

f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Si $\begin{pmatrix} 1) \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ 2) \ \forall \ 0 \preceq p \preceq k-1, \ \sum_n f_n^{(p)} \ CS \text{ sur } I \\ 3) \ \sum_n f_n^{(k)} \ CU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } I \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 1) \ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^{(k)} \text{ sur } I \\ 2) \ \forall \ 1 \preceq p \preceq k, \ S^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \end{pmatrix}$

Corollaire 4 : (Classe C^∞)

I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.

f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F.

Si $\begin{pmatrix} 1) \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ f_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \\ 2) \ \sum_n f_n \ CS \text{ sur } I \\ 3) \ \forall p \succeq 1, \ \sum_n f_n^{(p)} \ CU \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ de } I \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 1) \ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \\ 2) \ \forall p \succeq 1, \ S^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \end{pmatrix}$

IV) Approximation Uniforme

Théorème 1 :

Soient F un evn de dimension finie et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

Théorème 2 : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Toute fonction , réelle ou complexe, continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Autrement dit :

Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \| P_n - f \|_\infty = 0$$

où $\| f \|_\infty = \sup\{ \ |f(x)| \ / \ x \in [a, b]\}$