Fonctions usuelles
Résumé

Fonction arcos :

Propriété et Déf :

- Cos est continue et strict décroissante sur $[0,\pi]$.
- Cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$.
- Sa réciproque $\cos^{-1}$ s'appelle « arc cosinus » et se note : « arccos ».

À retenir (Résumé)

- $[0,\pi] \xrightarrow{\text{Cos bijection}} [-1,1]$
- $[-1,1] \xrightarrow{\text{arccos bijection}} [0,\pi]$
- $\forall x \in [0,\pi], \forall y \in [-1,1], \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos y$
- $\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(x)) = x$

N.B : arcos est strict $\searrow$ sur $[-1,1]$

Prop 2 :

1) $\forall x,y \in [0,\pi]$, on a :

a) $\cos x = \cos y \iff x = y$

b) $\cos x < \cos y \iff x > y$

2) $\forall x,y \in [-1,1]$, on a :

a) $\arccos(x) = \arccos(y) \iff x = y$

b) $\arccos(x) < \arccos(y) \iff x > y$

Prop 3 :

arccos est dérivable sur $]-1,1[$

Et on a :

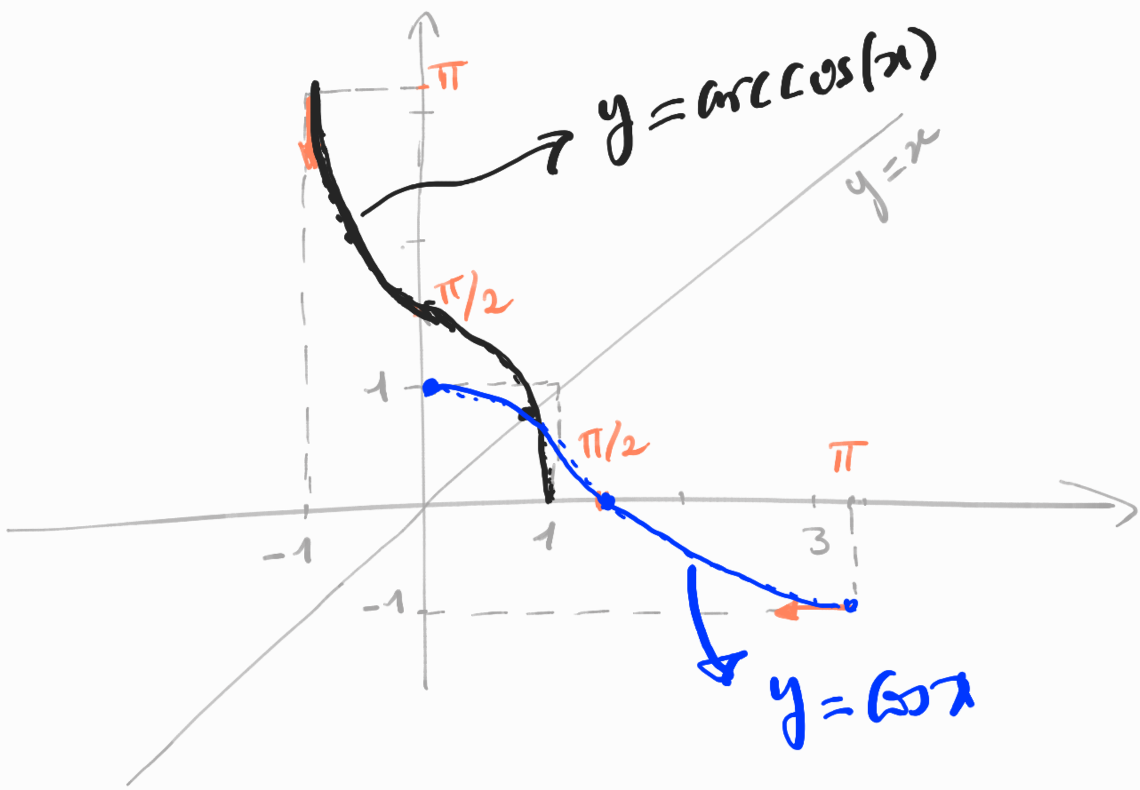
$$\forall x \in]-1,1[\;,\; \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Corollaire 4 :

une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$

est $(-\arccos x)$.

Tracé de $\mathcal{C}_{\cos}$ et $\mathcal{C}_{\arccos}$ dans un même repère.



2) Fonction arcsin :

Prop et déf :

1) • Sin est continue et strict croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) • Sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$.

3) • Sa réciproque $\sin^{-1}$ s'appelle la fonction arc sinus et se note arcsin.

4) • arcsin est continue et strict croissante sur $[-1, 1]$

À retenir (Résumé) :

- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\text{sin bijection}} [-1, 1]$
- $[-1, 1] \xrightarrow{\text{arcsin bijection}} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall y \in [-1,1], \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \ \arcsin(\sin(x)) = x$
- $\forall x \in [-1, 1]; \begin{cases} \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{et} \\ \arccos(x) \in [0, \pi] \end{cases}$

NB : Le domaine de définition de arcsin est $[-1,1]$

Prop 2 :

1/ $\forall x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a :

a/ $\sin(x) = \sin(y) \iff x = y$

b/ $\sin(x) < \sin(y) \iff x < y$

2/ $\forall x, y \in [-1, 1]$, on a :

a/ $\arcsin(x) = \arcsin(y) \iff x = y$

b/ $\arcsin(x) < \arcsin(y) \iff x < y$

Prop 3 : Dérivabilité de arcsin

arcsin est dérivable sur $]-1,1[$

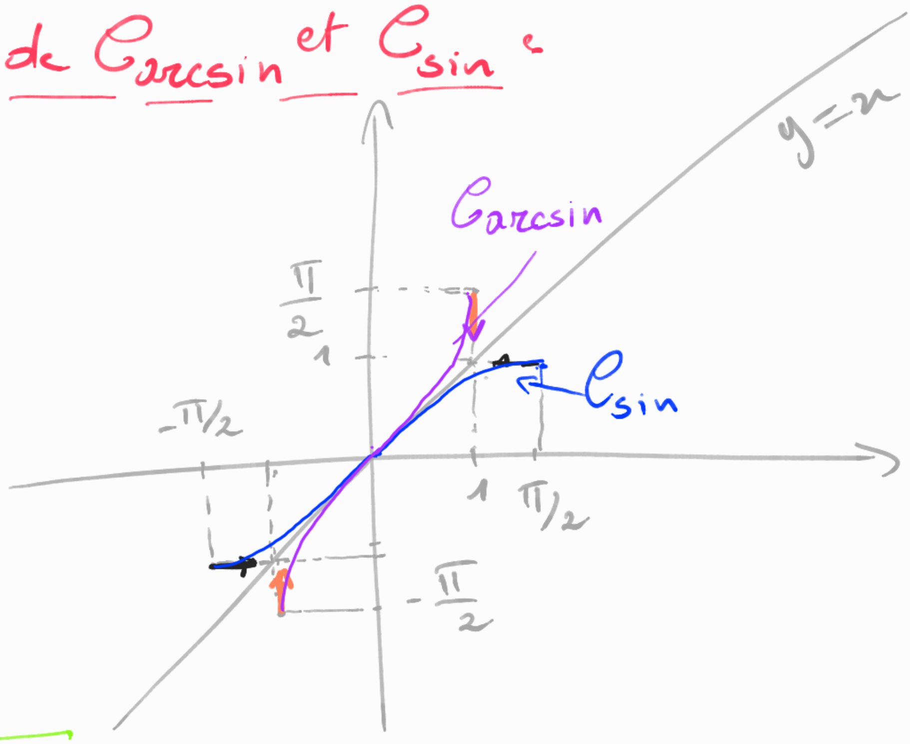
Et on a :

$\forall x \in]-1,1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Corollaire 4 :

Une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$.

Tracé de $\mathcal{C}_{\arcsin}$ et $\mathcal{C}_{\sin}$:



Prop 5 :

arcsin est impaire sur $[-1,1]$

3) Fonction arctan :

Prop et déf :

1) La fonction tan est continue et strict ↗ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

2) tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

3) Sa réciproque $\tan^{-1}$ s'appelle arc tangente et se note arctan.

4) arctan est continue et strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

À retenir (Résumé) :

- $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow{\tan \text{ bij}} \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \xrightarrow{\arctan \text{ bij}}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall y \in \mathbb{R}, \tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$

Avertissement :

arccos n'est ni paire ni impaire.

Prop 2 :

1) $\forall x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a :

a) $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $\tan(x) < \tan(y) \Leftrightarrow x < y$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

a) $\arctan(x) = \arctan(y) \iff x = y$

b) $\arctan(x) < \arctan(y) \iff x < y$

Prop 3 :

arctan est impaire

Prop :

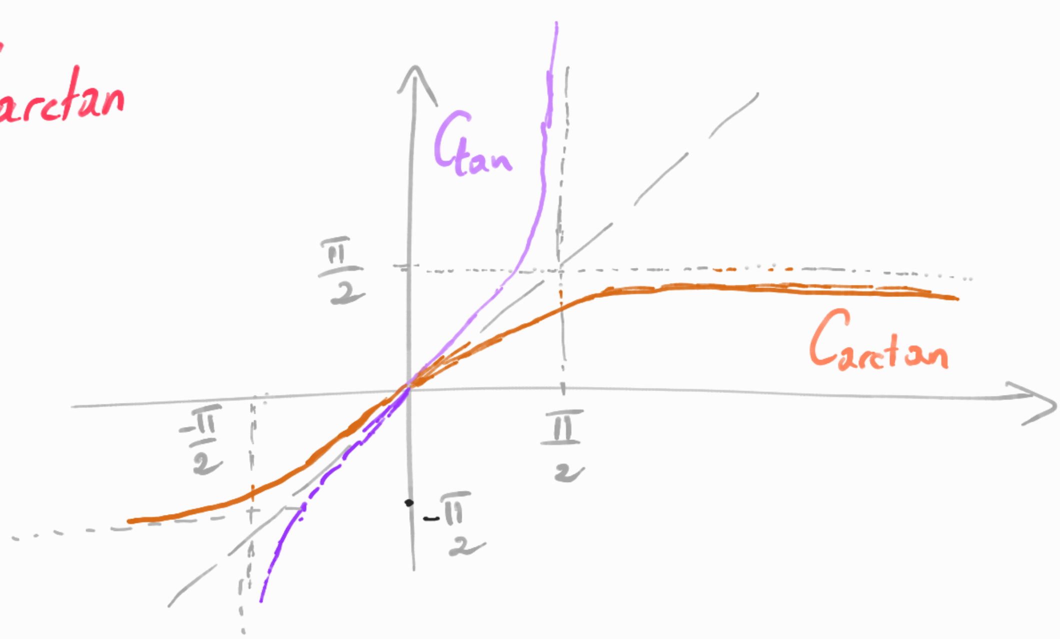
arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Corollaire :

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est la fonction $\arctan(x)$

Tracé de $C_{\arctan}$



$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$$

Fonctions hyperboliques

Ce sont : Cosinus Hyperbolique.
Sinus "
tangente "

1) Fonctions cosinus et sinus hyperbolique :

Déf 1 : Cosinus hyperbolique

On la note cosh ou ch

Elle est définie par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

Déf 2 : Sinus hyperbolique :

On la note sinh ou sh.

Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

NB :

1/ $D_{ch} = \mathbb{R}$ et $D_{sh} = \mathbb{R}$

2/ $ch(0) = 1$ et $sh(0) = 0$

3/ $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$

4/ $\lim\limits_{x \to -\infty} ch(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$

Prop 3 :

1/ (Parité)

a) ch est paire

b) sh est impaire

2/ (Dérivabilité)

a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $ch' = sh$

b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $sh' = ch$

À retenir

$\cos' = -\sin$, $ch' = sh$

$\sin' = \cos$, $sh' = ch$

Prop 1 : (Signe de ch et sh)

1/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \geq 1$

2) $\forall x \geq 0, \quad sh(x) \geq 0$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

a) $ch(x) = 1 \iff x = 0$

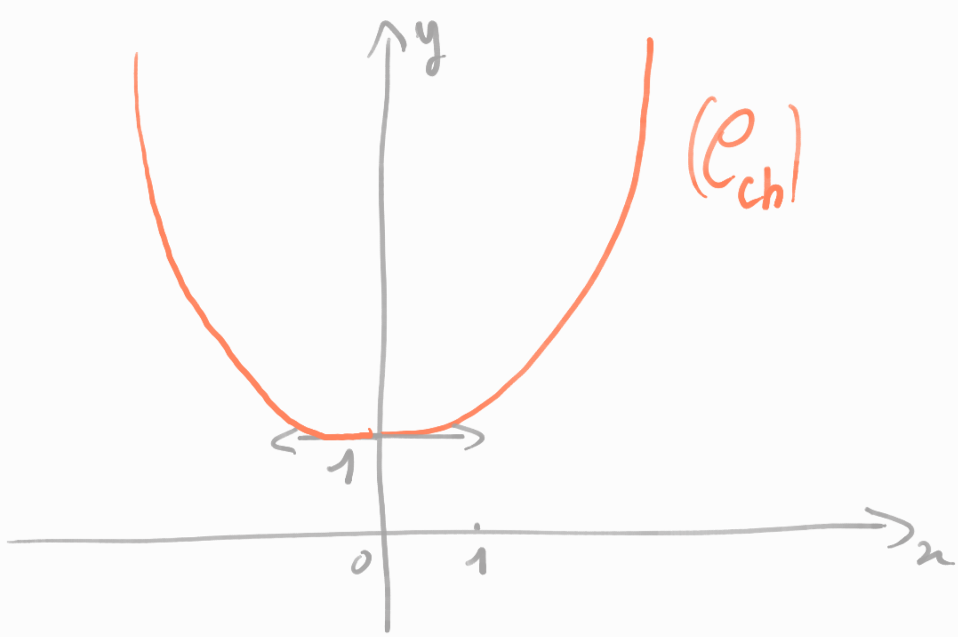
b) $sh(x) = 0 \iff x = 0$

Corollaire 5 : (Monotonie de ch et sh)

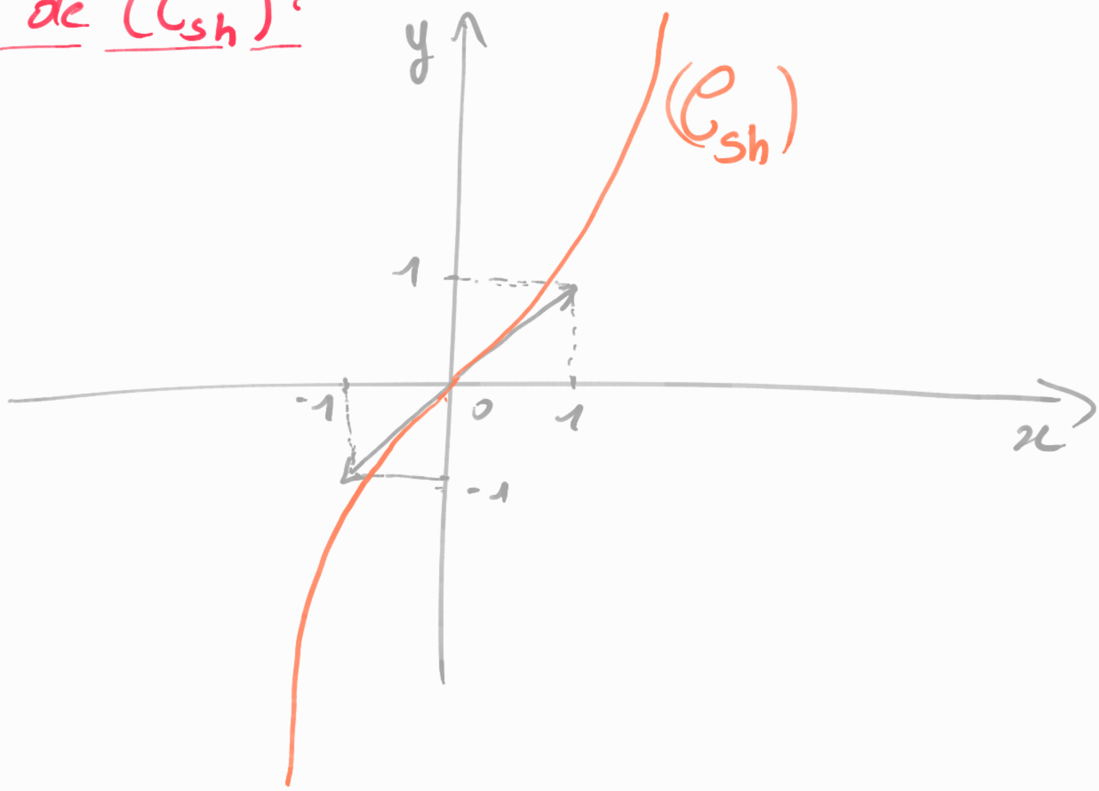
1) ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

2) sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Tracé de $(\mathscr{C}_{ch})$



Tracé de $(\mathcal{C}_{sh})$:



Prop 6 : (Formules de Transformations)

Soient a et $b \in \mathbb{R}$, on a :

1) $ch^2(a) - sh^2(a) = 1$ *

2) $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$ *

3) $ch(a-b) = ch(a)ch(b) - sh(a)sh(b)$

4) $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$ *

5) $sh(a-b) = sh(a)ch(b) - sh(b)ch(a)$

6) $sh(2a) = 2\,sh(a)ch(a)$

7) $ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a)$

$\quad\quad\quad = 2\,ch^2(a) - 1$

$\quad\quad\quad = 1 + 2\,sh^2(a)$

Tangente hyperbolique :

Déf 1 :

La fonction tangente hyperbolique

→ On la note th ou tanh

→ Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

NB :

1/ $D_{th} = \mathbb{R}$

2/ $$th(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

3/ $th(0) = 0$

4/ $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1$

Prop 2 :

1/ th est impaire.

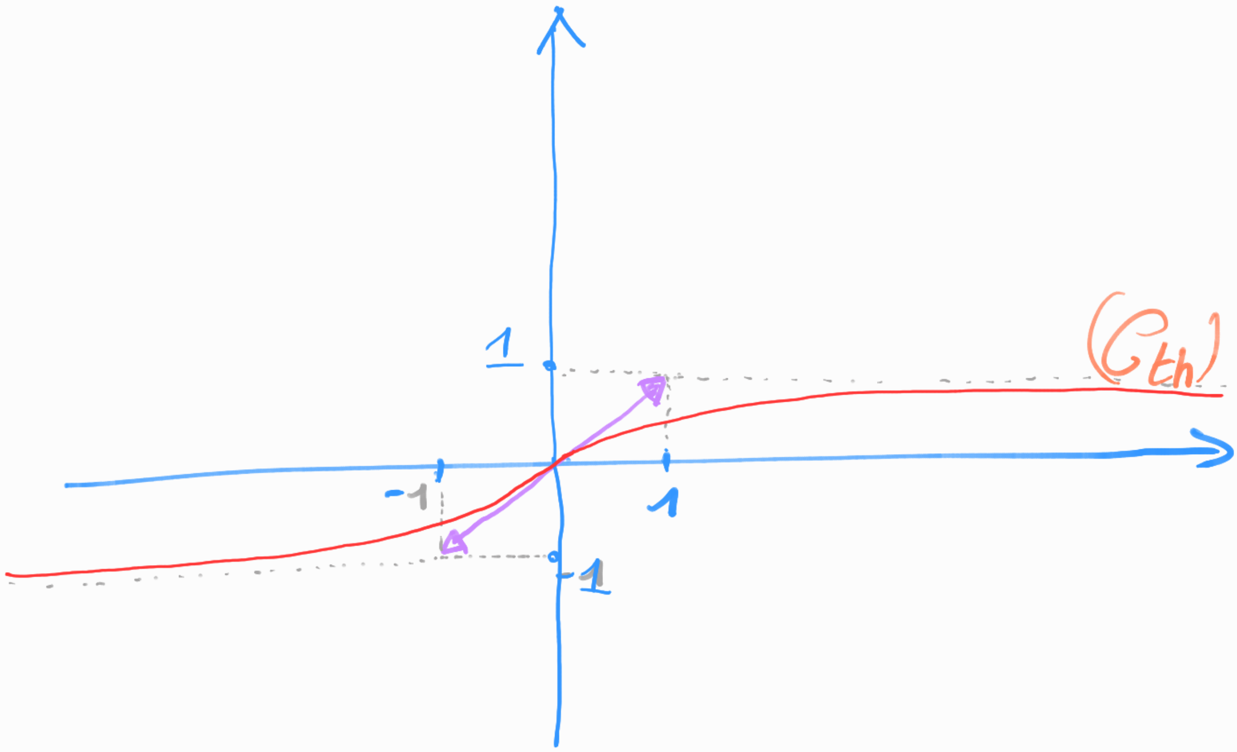
2/ $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$$

3/ th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x).$$

Corollaire 3 :

th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Fonctions hyperboliques réciproques

1) Fonction argument sinus hyperbolique :

Def 1 :

1) sh est continue et strictement ↗ sur $\mathbb{R}$.

2) sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3) Sa réciproque sh^{-1} s'appelle la fonction argument sinus hyperbolique et se note argsh.

NB :

On l'appelle aussi arcsinus hyperbolique, et se note arcsinh.

Résumé (à retenir) :

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{sh bij}} \mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{argsh bij}} \mathbb{R}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = y \Longleftrightarrow x = \operatorname{argsh}(y)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x$

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$

6) argsh est strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

Prop 2 :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

a) $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}(y) \Longleftrightarrow x = y$

b) $\operatorname{sh}(x) < \operatorname{sh}(y) \Longleftrightarrow x < y$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

a) $\operatorname{argsh}(x) = \operatorname{argsh}(y) \Longleftrightarrow x = y$

b) $\operatorname{argsh}(x) < \operatorname{argsh}(y) \Longleftrightarrow x < y$

Prop 3 :

argsh est impaire.

Prop 4 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(\operatorname{argsh}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Prop 5 :

argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsh}(x) + c$$

À retenir

NB :

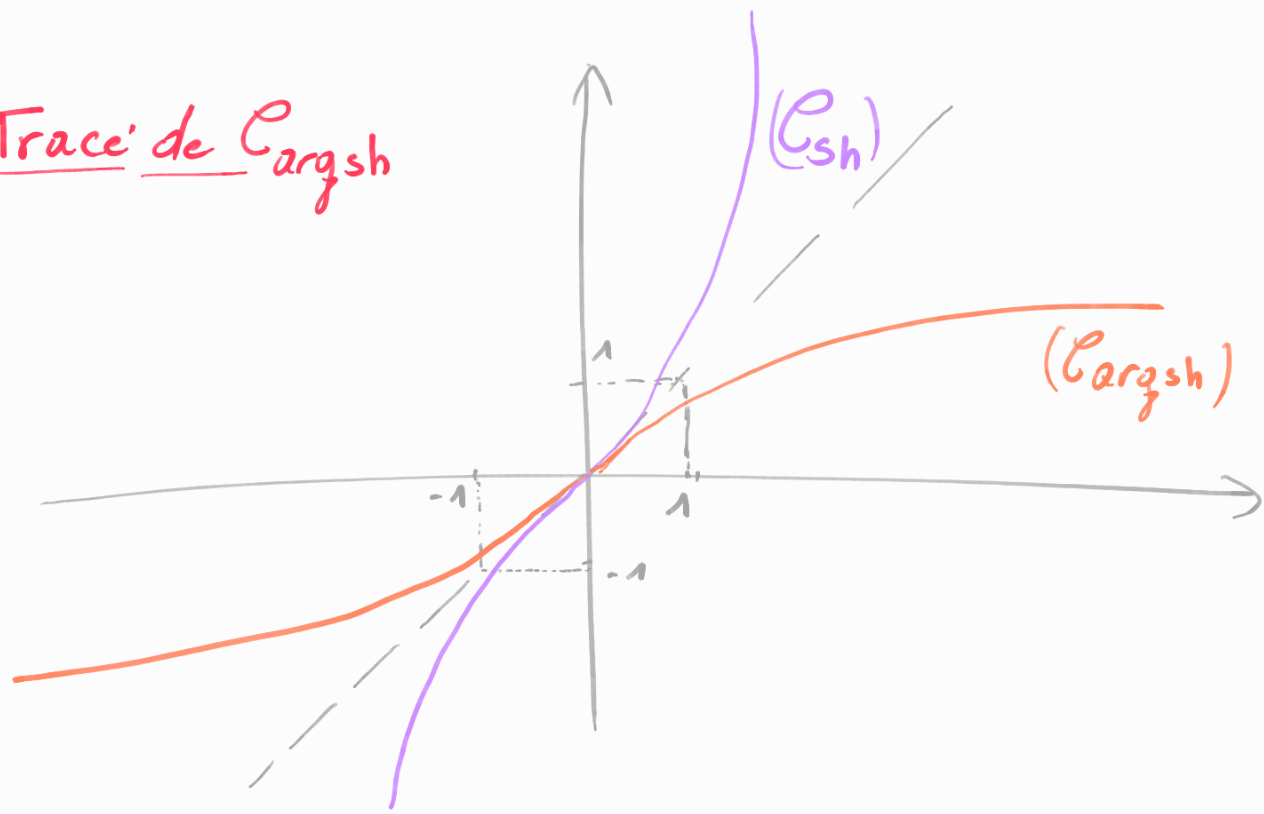
$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{argsh}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{argsh}(x) = -\infty$$

Prop 6 : (Expression logarithmique de argsh(x))

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Tracé de $\mathcal{C}_{argsh}$



2) Fonction argument cosinus hyperbolique :

Déf 1 :

1) Ch définit une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$

2| Sa réciproque ch^{-1} s'appelle La fonction argument cosinus hyperbolique et se note argch.

3| argch est strictement $\nearrow$ sur $[1,+\infty[$.

NB :

On l'appelle ainsi arc cosinus hyperbolique et on le note arccosh

Résumé (à retenir)

1| $[0,+\infty[\xrightarrow{\text{Ch bij}} [1,+\infty[$

2| $[1,+\infty[\xrightarrow{\text{argch bij}} [0,+\infty[$

3| $\forall x \in [0,+\infty[, \forall y \in [1,+\infty[$, on a :

$$ch(x) = y \Longleftrightarrow x = argch(y)$$

4| $\forall x \in [0,+\infty[, argch(ch(x)) = x$

Prop 2 :

1/ $\forall x, y \in [0, +\infty[$, on a :

a) $ch(x) = ch(y) \Longleftrightarrow x = y$

b) $ch(x) < ch(y) \Longleftrightarrow x < y$

2/ $\forall x, y \in [1, +\infty[$, on a :

a) $argch(x) = argch(y) \Longleftrightarrow x = y$

b) $argch(x) < argch(y) \Longleftrightarrow x < y$

Prop 3 :

$\forall x \in [1, +\infty[$, on a :

1/ $sh(argch(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

2/ $th(argch(x)) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Prop 4 :

argch est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$\forall x \in]1, +\infty[$, $argch'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

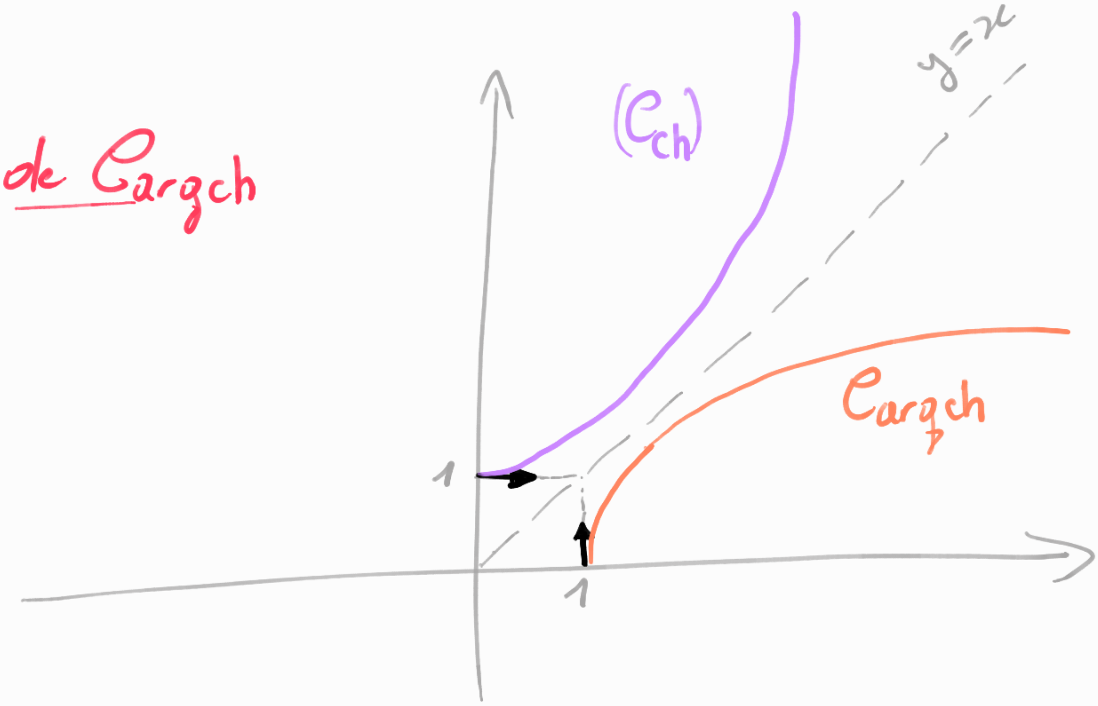
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = argch(x) + C$$

à retenir

Prop : (Expression Logarithmique de argch(x))

$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

Tracé de $\mathcal{C}_{\operatorname{argch}}$



3) Fonction argument tangente hyperbolique :

Prop et déf 1 :

1) th définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

2) Sa réciproque th^{-1} s'appelle la fonction argument tangente hyperbolique et se note argth.

3) argth est strictement ↗ sur $]-1,1[$.

Résumé (à retenir) :

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{th bij}}]-1,1[$

2) $]-1,1[\xrightarrow{\text{argth bij}} \mathbb{R}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-1,1[$, on a

$$th(x) = y \iff x = argth(y).$$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ argth(th(x)) = x$

5) $\forall x \in]-1,1[,\ th(argth(x)) = x$

Prop 2 :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

a) $th(x) = th(y) \iff x = y$

b) $th(x) < th(y) \iff x < y$.

2) $\forall x, y \in]-1,1[$, on a :

a) $argth(x) = argth(y) \iff x = y$

b) $argth(x) < argth(y) \iff x < y$

Prop 3 : argth est impaire.

Prop 4 :

argth est dérivable sur $]-1,1[$

Et on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

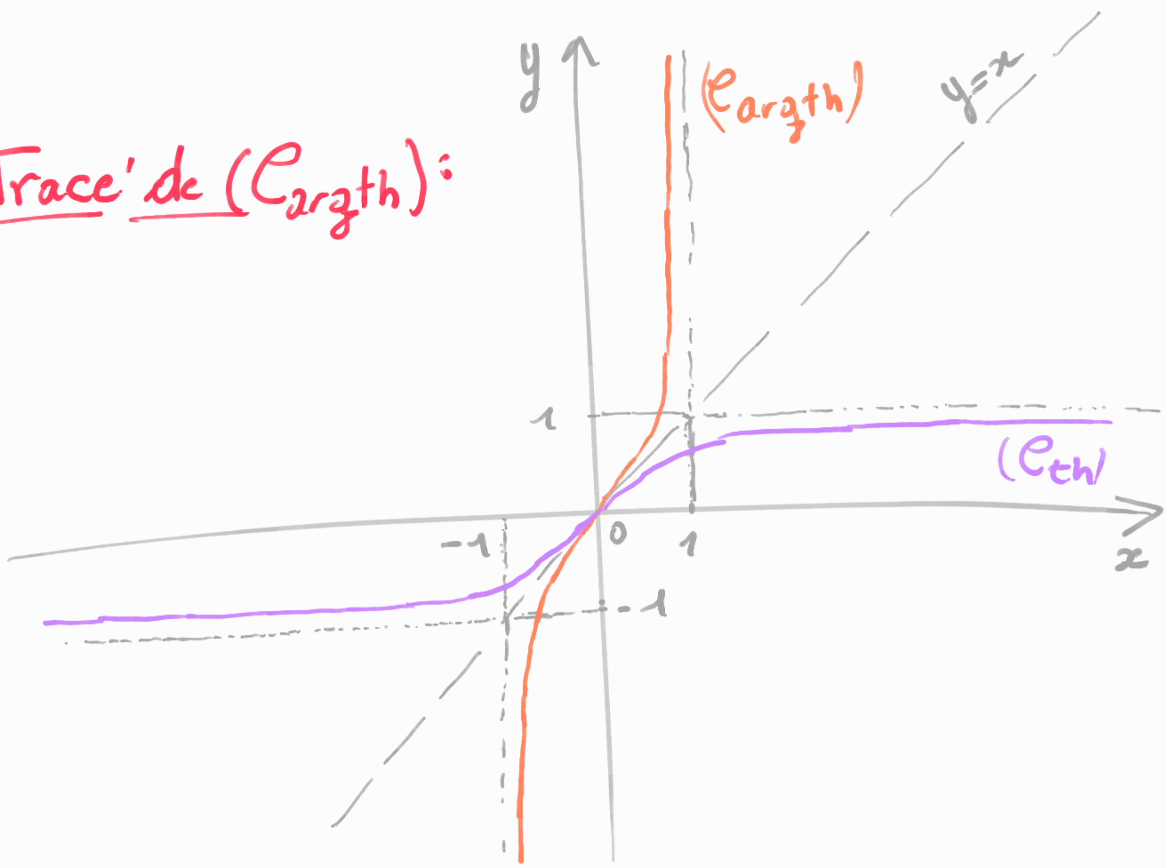
À retenir

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{argth}(x) + C$$

Prop 5 (Expression Logarithmique de argth(x)) :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Tracé de $(\mathcal{C}_{\operatorname{argth}})$:



Prop 6 :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sh(x)}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{th(x)}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{argsh(x)}{x} = 1$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{argth(x)}{x} = 1$

Fin