

Algèbre

Partie I

1.a. Soit $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices de E , et λ un réel. Alors :

$$T(\lambda M + N) = \sum_{k=1}^n \lambda m_{k,k} + n_{k,k} = \lambda \sum_{k=1}^n m_{k,k} + \sum_{k=1}^n n_{k,k} = \lambda T(M) + T(N).$$

T s'appelle la trace!

1.b. $\varphi_u : M \mapsto UM$ est linéaire, et $T_U = T \circ \varphi_U$. T_U est donc linéaire comme composée d'applications linéaires, et $T_U \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$.

1.c. On a $\text{Ker}(T_U) = H_U$, et donc H_U , comme tout noyau d'une application linéaire, est un sous-espace vectoriel de E .

2.a. $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de E .

2.b. $UM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$. On a donc $T(UM) = 0$ si, et seulement si, $a+b+c+d=0$.

2.c. D'après la question précédente, $T(UE_{1,1}) \neq 0$. $\text{Im } T_U$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, et il n'est pas réduit au singleton $\{0\}$. Comme les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$, on a $\text{Im}(T_U) = \mathbb{R}$, et $\dim \text{Im } T_U = 1$. Le théorème du rang donne $\dim H_U = 3$.

2.d. Posons $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. M est inversible, et est dans H_U .

Partie II

1.a. Si $AB = (c_{i,j})$, on a :

$$c_{j,j} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,j}.$$

D'où

$$\begin{aligned} T(AB) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} b_{i,j} \end{aligned}$$

1.b. La première identité vient de ce que les coefficients de ${}^t A$ sont les $(a_{j,i})$. La deuxième s'obtient en permutant la somme!

2.a. Si U est la matrice nulle, alors $H_U = E$, et $\dim H_U = n^2$.

2.b. Si $U = (u_{i,j}) \neq 0$, soit (i_0, j_0) tels que $u_{j_0, i_0} \neq 0$. Alors :

$$T(UE_{i_0, j_0}) = u_{j_0, i_0} \neq 0.$$

De même que dans la partie I, on en déduit que $\text{Im } T_U = \mathbb{R}$, et que $\dim H_u = n^2 - 1$.

3.a.

$$\begin{aligned} T_{i,j}(E_{k,l}) &= T(E_{j,i} E_{k,l}) \\ &= T({}^t E_{i,j} E_{k,l}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

- 3.b.** Comme E^* est de dimension n^2 , il suffit de montrer que ces n^2 éléments forment une famille libre. Mais si

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} T_{i,j} = 0,$$

on évalue en $E_{i,j}$ pour prouver que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} T_{i,j}(E_{i,j}) = \alpha_{i,j} = 0.$$

La famille est donc libre!

- 4.** φ est clairement une application linéaire. En outre, elle envoie la base de E constituée des $E_{j,i}$ sur la base de E^* constituée par les $T_{i,j}$: φ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- 5.a.** La dimension d'un hyperplan vectoriel de E est $n^2 - 1$.
- 5.b.** D'abord, H et $\text{vect}(A)$ sont en somme directe. En effet, si $M \in H \cap \text{vect}(A)$, alors $M = \lambda A$, et si $\lambda \neq 0$, alors A est dans H , ce qui ne saurait être. Ensuite, $\dim(H \oplus \text{vect}(A)) = n^2 - 1 + 1 = n^2$. Comme la dimension de E est aussi n^2 , on a l'égalité demandée!
- 5.c.** Soit N dans E . N se décompose de manière unique en $M + \lambda A$, où M est dans H . On pose $l(N) = \lambda$. Il est facile de vérifier que N est linéaire (plus généralement, on obtient une application linéaire en recollant des applications linéaires définies sur des sous-espaces vectoriels en somme directe), et il est clair que $H = \text{Ker } l$.
- 5.d.** L'application l définie à la question précédente peut aussi s'écrire $l = T_U$, en vertu de la question **4.**, où U est une matrice de E . En particulier, $H = \text{Ker } T_U = H_U$.

Partie III

- 1.a.** On calcule par exemple le rang de P en faisant des permutations de colonnes (en ramenant la dernière colonne en première position, et en décalant toutes les autres colonnes d'un cran vers la gauche). Il est alors clair que le rang de P est n , et que P est inversible.
- 1.b.** On a :

$$\begin{aligned} T_{R_r}(P) &= T(R_r P) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{j,i} p_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^r p_{i,i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit H un hyperplan vectoriel, $H = H_U$ où U est de rang r . On a alors l'existence de deux matrices inversibles S_1 et S_2 telles que $S_1 U S_2 = R_r$. On pose $M = S_2 P S_1$, qui est inversible comme produit de matrices inversibles. Mais :

$$\begin{aligned} T(UM) &= T(S_1^{-1} R_r S_2^{-1} S_2 P S_1) \\ &= T(S_1^{-1} R_r P S_1) \\ &= T(R_r P) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que M est dans H .

FIN

