

Nombres réels

Résumé

I) Rappels et Compléments

1) Valeur absolue

Déf 1

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Prop 2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

1) $|x| \geq 0$

2) $|-x| = |x|$

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$

4) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ (si $y \neq 0$)

5) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

6) $\forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$

7) $\begin{cases} |x| \geq x \\ x \leq |x| \\ |x| \geq -x \\ -x \leq |x| \end{cases}$

8) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$9) |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$10) |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$$

$$11) ||x|| = |x|$$

$$12) \forall n \in \mathbb{N}, |(-1)^n| = 1$$

$$13) \sqrt{x^2} = |x|$$

$$14) \forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x^2} = x$$

$$15) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ on a :}$$

$$\left| \prod_{k=1}^n x_k \right| = \prod_{k=1}^n |x_k|$$

Prop 3 (Inégalité triangulaire)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$1) |x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

$$2) |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ sont de même signe})$$

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire généralisée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (\text{Inégalité triangulaire généralisée})$$

Corollaire 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$1) |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$2) \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$$

Prop 6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a :

$$1) \text{ i) } |x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$$

$$\text{ii) } |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$2) \text{ i) } |x| \geq r \Leftrightarrow (x \leq -r \text{ ou } x \geq r)$$

$$\text{ii) } |x| > r \Leftrightarrow (x < -r \text{ ou } x > r)$$

2) Partie entière

Prop et déf 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Il existe un unique entier relatif m vérifiant :

$$m \leq x < m+1$$

2) m s'appelle la partie entière de x , et se note $\lfloor x \rfloor$.

WB

$\lfloor x \rfloor$ se note aussi $E(x)$ ou $[x]$.

Prop 2

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq x < p+1 \\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3) \text{ i) } \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\text{ ii) } \forall x \in \mathbb{R}, x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$$

$$5) \text{ i) } \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor m \rfloor = m$$

$$\text{ ii) } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a :}$$

$$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Attention

L'égalité « $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ » est en général fautive.

Réflexes à avoir

Ici $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

$$1) x \geq m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq m$$

$$2) x > m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq m$$

$$3) x < m \Rightarrow \lfloor x \rfloor < m$$

$$4) x < m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq m-1$$

Prop 3

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists 0 \leq \varepsilon < 1, x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$$

Prop 4 (Croissance de la partie entière)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

NB

1) $x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$

2) Attention !

L'implication suivante est en général fautive .

$$\langle\langle x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor \rangle\rangle$$

Gocab :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x - \lfloor x \rfloor)$ s'appelle la partie fractionnaire de x .

3) Approximation décimale d'un nombre réel

Déf

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut est :

$$10^{-n} \cdot \lfloor 10^n \cdot x \rfloor$$

2) L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès est :

$$10^{-n} \cdot (\lfloor 10^n \cdot x \rfloor + 1)$$

II) Borne supérieure - Borne inférieure

1) Parties bornées

Prop

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On a :

$$A \text{ bornée} \Leftrightarrow (\exists c \geq 0, \forall x \in A, |x| \leq c)$$

2) Borne supérieure - Borne inférieure

a) Borne supérieure

Déf 1

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

1) La borne supérieure de A est le plus petit de ses majorants.

« sous réserve d'existence »

2) On la note $\sup(A)$.

NB

1) $\sup(A)$ est un majorant de A .

2) $\forall x \in A, x \leq \sup(A)$.

Prop 2

Si A possède un plus grand élément $\max(A)$, alors c'est sa borne supérieure.

Càd : $\sup(A) = \max(A)$

Prop 3 (Existence de la borne supérieure)

Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Prop 4 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient A une partie non vide de \mathbb{R} et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sup(A) = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

a) Borne inférieure

Déf 1

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

1) La borne inférieure de A est le plus grand de ses minorants.

« sous réserve d'existence »

2) On la note $\inf(A)$.

NB

1) $\inf(A)$ est un minorant de A .

2) $\forall x \in A, x \geq \inf(A)$

Prop 2

Si A possède un plus petit élément $\min(A)$, alors c'est sa borne inférieure.

Càd : $\inf(A) = \min(A)$

Prop 3 (l'existence de la borne inférieure)

Toute partie non vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Prop 4 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient A une partie non vide de \mathbb{R} et $\beta \in \mathbb{R}$. On a:

$$\inf(A) = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

Réflexes à avoir



$$\sup(A) \leq M \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \leq M)$$

le plus petit des majorants

M un majorant de A



$$m \leq \inf(A) \Leftrightarrow (\forall x \in A, m \leq x)$$

le plus grand des mineurs

ou mineur

III) Densité d'une partie de \mathbb{R}

1) Intervalles de \mathbb{R}

Rappel (Segment de \mathbb{R})

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$.

1) On rappelle que :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

2) $[a, b]$ s'appelle **segment**.

Déf 1

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} .

I est dit **intervalle** de \mathbb{R} si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \text{ avec } x \leq y, \text{ on a } [x, y] \subset I$$

Convention

\emptyset est par convention un intervalle de \mathbb{R} .

Prop 2

Les intervalles de \mathbb{R} sont de l'une des formes suivantes :

1) i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

ii) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

$$\text{iii) }]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

$$\text{iv) }]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

où $a \leq b$, deux réels.

$$2) \text{ i) } [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$$

$$\text{ii) }]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$$

$$\text{iii) }]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

$$\text{iv) }]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

$$3)]-\infty, +\infty[, \text{ qui est } \mathbb{R}.$$

2) Densité

Déf 1

Une partie A de \mathbb{R} est dite *dense* dans \mathbb{R} si et seulement si entre deux réels distincts existe au moins un élément de A .

Autrement dit

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } x < y, \exists a \in A, x < a < y \right)$$

Prop 2

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est dense dans \mathbb{R} .
- 2) $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists a \in A, x < a < y$
- 3) $\forall x < y \in \mathbb{R},]x, y[\cap A \neq \emptyset$

Prop 3

- 1) \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .
- 2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} .

Autrement dit

- 1) Entre deux réels distincts existe au moins un nombre rationnel.
- 2) Entre deux réels distincts existe au moins un nombre irrationnel.

IV) Droite numérique achevée

Déf 1

La droite numérique achevée est l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$, et qui

est défini par :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Prolongement de l'ordre \leq dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Si x et $y \in \mathbb{R}$.

« $x \leq y$ » c'est l'ordre connu dans \mathbb{R} .

2) Si $x \in \mathbb{R}$.

i) $-\infty \leq x$

ii) $x \leq +\infty$

3) i) $-\infty \leq -\infty$

ii) $+\infty \leq +\infty$

iii) $-\infty \leq +\infty$

Prop 2

1) « \leq » est une relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Dans l'ensemble ordonné $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$, toute partie non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Fin