EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 : Normes équivalentes

On note E l'espace vectoriel des applications de classe C^1 définies sur l'intervalle [0;1] et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2\,|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\ .$$

(a) Démontrer que $\| \|$ définit une norme sur E.
De même, $\| \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.

(b) **i.** Donner la définition de deux normes équivalentes.

ii. Démontrer que les deux normes $\| \|$ et $\| \|'$ sont équivalentes sur E.

2. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\| \|$?

Exercice 2 : Continuité d'une fonction définie par intégrale

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J.

On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$.

Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I.

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
Démontrer que la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.

3. On pose, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.
Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.
La fonction f_2 est-elle continue sur $[0,+\infty[$?
Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

Exercice 3 : Une intégrale curviligne

Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ le long du cercle γ de centre 0 et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Problème : Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. **(a)** Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n\, x^n(1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. **(a)** Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. **(a)** Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

(b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I.

(b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1232 – D'après documents fournis