

Partie I

1.- Le noyau de D est constitué des fonctions f , de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que $f' = 0$. $\text{Ker}(D)$ est donc l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. f est en particulier continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est un élément de E tel que $F' = f$.

Ceci montre que tout élément de E est dans $\text{Im}(D)$.

$$\boxed{\text{Ker}(D) = \{\text{fonctions constantes}\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(D) = E.}$$

2.- Soient a , b et c trois réels tels que pour tout réel t , $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$. On écrit cette égalité dans le cas particulier où $t = 0$, $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. On obtient le système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ e^{\pi/\sqrt{3}}a + e^{-\pi/(2\sqrt{3})}b = 0 \\ e^{2\pi/\sqrt{3}}a - e^{-\pi/\sqrt{3}}c = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Mais alors } \begin{cases} c = -a \\ b = -e^{(\sqrt{3}\pi)/2}a \\ (e^{2\pi/\sqrt{3}} + e^{-\pi/\sqrt{3}})a = 0 \end{cases} \quad \text{et donc } \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

3.- Quand t tend vers 0,

$$\begin{aligned} (af_1 + bf_2 + cf_3)(t) &= a(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)) + b(1 - \frac{t}{2} + o(t))(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)) + c(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2))(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)) \\ &= a(1 + t + \frac{t^2}{2}) + b(1 - \frac{t}{2})(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + c(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8})(1 - \frac{3t^2}{8}) + o(t^2) \\ &= (a + c) + (a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c)t + (\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{1}{4}c)t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

Puisque la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est la fonction nulle, quand t tend vers 0, on a aussi

$$(af_1 + bf_2 + cf_3)(t) = 0 + 0.t + 0.t^2 + o(t^2).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a alors

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases}.$$

La première égalité fournit $c = -a$. La deuxième s'écrit alors $\frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0$ ou encore $b = -\sqrt{3}a$. En reportant dans la dernière équation, on obtient $(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4})a = 0$ et donc $a = 0$. Puis $b = -\sqrt{3}a = 0$ et $c = -a = 0$.

4.- Pour tout réel t , on divise les deux membres de l'égalité $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ par le réel non nul e^t . On obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a + b.e^{-3t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.e^{-3t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad (*).$$

Pour tout réel t ,

$$\left| b.e^{-3t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.e^{-3t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \right| \leq (|b| + |c|)e^{-3t/2}.$$

Par suite, l'expression $b.e^{-3t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.e^{-3t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

En passant à la limite quand t tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient alors $a = 0$. Après simplification par le réel non nul $e^{-3t/2}$, il reste

$$\forall t \in \mathbb{R}, b.\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c.\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

En évaluant en $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $b = c = 0$.

En résumé,

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a.f_1 + b.f_2 + c.f_3 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0).$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E ou aussi une base de G .

5.- On a $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$. Mais alors, pour tout réels a , b et c , on a

$$D(af_1 + bf_2 + cf_3) = af_1 + \left(-\frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)f_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)f_3.$$

Ainsi, l'image par D d'un élément de G est encore un élément de G et donc

G est stable par D .

6.- Les égalités de la question précédente fournissent immédiatement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7.- $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$ Puis

$$M^3 = M.M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

8.- La question 7.- montre que M est inversible et que

$$M^{-1} = M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = {}^t M.$$

9.- La matrice de l'endomorphisme $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible et donc

$\widehat{D}$ est un automorphisme de G .

10.- Puisque $M^{-1} = M^2$,

$$(\widehat{D})^{-1} = \widehat{D}^2.$$

Partie II

11.-

i	f_i	f'_i	f''_i
1	$f_1(0) = 1$	$f'_1(0) = 1$	$f''_1(0) = 1$
2	$f_2(0) = 0$	$f'_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$f''_2(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$f_3(0) = 1$	$f'_3(0) = -\frac{1}{2}$	$f''_3(0) = -\frac{1}{2}$

Pour calculer les $f'_i(0)$ et $f''_i(0)$, on a utilisé les égalités

$$\begin{cases} f'_2 = -\frac{1}{2}f'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f'_3 \\ f'_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f'_2 - \frac{1}{2}f'_1. \end{cases}$$

qui fournissent aussi

$$\begin{cases} f''_2 = -\frac{1}{2}f''_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}f''_3 \\ f''_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f''_2 - \frac{1}{2}f''_1. \end{cases}.$$

12.- Montrons que φ est un produit scalaire sur G .

- Soit $(g, h) \in G^2$. $\varphi(g, h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0) = h(0)g(0) + h'(0)g'(0) + h''(0)g''(0) = \varphi(h, g)$
Donc φ est une forme symétrique.
- Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(g_1, g_2, h) \in G^3$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, h) &= (\lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0))h(0) + (\lambda_1 g'_1(0) + \lambda_2 g'_2(0))h'(0) + (\lambda_1 g''_1(0) + \lambda_2 g''_2(0))h''(0) \\ &= \lambda_1(g_1(0)h(0) + g'_1(0)h'(0) + g''_1(0)h''(0)) + \lambda_2(g_2(0)h(0) + g'_2(0)h'(0) + g''_2(0)h''(0)) \\ &= \lambda_1 \varphi(g_1) + \lambda_2 \varphi(g_2). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire par rapport à sa première variable et donc bilinéaire par symétrie.

- Soit $g \in G$. Posons $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ où a, b et c sont trois réels.
D'après la question 5.-, on a

$$g' = af_1 + \left(-\frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)f_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)f_3 \quad (**).$$

D'après le tableau de la question 11.-, on a $g(0) = a + c$ puis $g'(0) = a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c$ et, en dérivant la relation (**),

$$g''(0) = a + \left(-\frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)\frac{1}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c.$$

Donc

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \varphi(af_1 + bf_2 + cf_3, af_1 + bf_2 + cf_3) = (a + c)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2.$$

Pour tout g de G , on a déjà $\varphi(g, g) \geq 0$ ce qui montre que la forme φ est positive. De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(g, g) = 0 &\Leftrightarrow (a+c)^2 + \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c=0 \\ a - \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ \frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \\ \frac{3}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ \sqrt{3}a+b=0 \\ \sqrt{3}a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b=\sqrt{3}a \\ 2\sqrt{3}a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0. \end{aligned}$$

φ est donc une forme définie positive sur G .

En résumé, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire sur G .

φ est un produit scalaire sur G .

13.- Toujours à partir du tableau de la question 11.-, on a

$$\varphi(f_1, f_2) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \varphi(f_1, f_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ et } \varphi(f_2, f_3) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

La base $\mathcal{B}$ est orthogonale.

14.- $\varphi(f_1, f_1) = 1 + 1 = 2 \neq 1$. Donc

La base $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée.

Partie III

15.- Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, f est déjà trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit alors n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons que f soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore f est $n+3$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont des éléments de E).

16.- Soit P un polynôme tel que $P''' = P$. Si P n'est pas le polynôme nul, alors $\deg(P''') < \deg(P)$ et en particulier $P'' \neq P$. Réciproquement, le polynôme nul est bien solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

17.- A la question 7.-, on a établi que $M^3 = I_3$. On en déduit que $\widehat{D}^3 = \text{Id}_G$ ou encore la restriction de $D^3 - \text{Id}_E$ à G est nulle. Ceci montre que

$G \subset \text{Ker}(T),$

ou encore toute combinaison linéaire de f_1 , f_2 et f_3 est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

18.- Soient f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ et $g = f'' + f' + f$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g.$$

Donc g est solution de l'équation $y' = y$ sur $\mathbb{R}$.

19.- Les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où λ est une constante réelle.

20.- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $z^2 + z + 1 = 0$. Cette dernière équation admet pour solutions les nombres $z_1 = j = e^{-1/2} e^{i\sqrt{3}/2}$ et $z_2 = \bar{j} = e^{-1/2} e^{-i\sqrt{3}/2}$.

On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t/2} \left(A \cos \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \right) + B \sin \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \right) \right).$$

Une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ est donc (f_2, f_3) .

21.- Une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est bien sur la fonction $t \mapsto \frac{\lambda}{3} e^t$. On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{3} e^t + e^{-t/2} \left(A \cos \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \right) + B \sin \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} \right) \right), \quad (\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3.$$

22.- les questions 18.- à 21.- montrent que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est une combinaison linéaire de f_1 , f_2 et f_3 et donc un élément de G . Ainsi, $\text{Ker}(T) \subset G$, et finalement

$$\text{Ker}(T) = G,$$

ou encore les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les combinaisons linéaires de f_1 , f_2 et f_3 .

FIN

