

# Corrigé

## I

1 L'application  $f$  est produit et composée de fonction  $C^\infty$  donc est  $C^\infty$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3\exp(-x^2) - 6x^2\exp(-x^2) = (3 - 6x^2)\exp(-x^2)$ .  $f'(x)$  est du même signe que  $3 - 6x^2$  qui s'annule en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  qui est positif sur  $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$  et négatif sur  $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[ \cup ]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

Si  $x > 0$   $3x\exp(-x^2) = \frac{3x}{e^{x^2}} = 3\frac{\sqrt{x^2}}{e^{x^2}}$  donc a pour limite 0 en  $+\infty$  donc si  $f$  a pour limite  $-1$  en  $+\infty$

Si  $x < 0$   $3x\exp(-x^2) = \frac{3x}{e^{x^2}} = 3\frac{-\sqrt{x^2}}{e^{x^2}}$  donc a pour limite 0 en  $+\infty$  donc si  $f$  a pour limite  $-1$  en  $-\infty$

D'où le tableau de variations :

| $X$     | $-\infty$ |              | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |            | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |              | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------------|-----------------------|------------|----------------------|--------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $-$          | $0$                   | $+$        | $0$                  | $-$          |           |
| $f(x)$  | $-1$      | $\downarrow$ |                       | $\uparrow$ |                      | $\downarrow$ | $-1$      |

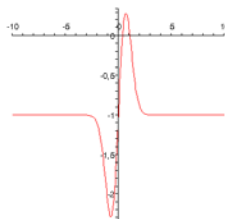
La droite  $y = -1$  est asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2  $f''(x) = -12x\exp(-x^2) - 2x(3 - 6x^2)\exp(-x^2) = (12x^3 - 18x)\exp(-x^2)$ .  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe en 0 donc le point d'abscisse 0 de  $C_f$  est un point d'inflexion.

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est  $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 3x - 1$ .

Soit  $g(x) = 3x - 1$ .  $f(x) - g(x) = 3x\exp(-x^2) - 1 - (3x - 1) = 3x(\exp(-x^2) - 1)$  Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^* \exp(-x^2) < 1$  car  $x^2 > 0$  donc  $\exp(-x^2) - 1 < 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  donc  $f(x) - g(x)$  est du signe contraire à  $x$  donc change de signe en 0. On retrouve que  $C_f$  admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

4.



5a  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc admet en 0 des DL jusqu'à n'importe quel ordre.

b  $\exp(-x^2) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$  donc  $f(x) = 3x(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)) - 1 = -1 + 3x - 3x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$ .

6. Une primitive de  $x \rightarrow \frac{n-2x^2}{x}$  est  $x \rightarrow n \ln(|x|) - x^2$  donc les solutions de  $H_n$  sur les deux domaines

d'intégration sont les applications de la forme  $x \rightarrow \lambda \exp(n \ln(|x|) - x^2) = \lambda |x|^n \exp(-x^2)$  où  $\lambda$  est un réel quelconque.

Sur  $]0, +\infty[$  les solutions de  $H_n$  sont de la forme  $x \rightarrow \lambda x^n \exp(-x^2)$  où  $\lambda$  est un réel quelconque.

Sur  $]-\infty, 0[$  les solutions de  $H_n$  sont de la forme  $x \rightarrow \alpha (-1)^n x^n \exp(-x^2)$  où  $\alpha$  est un réel quelconque. Si on pose  $\lambda = (-1)^n \alpha$  les solutions de  $H_n$  sur  $]-\infty, 0[$  sont de la forme  $x \rightarrow \lambda x^n \exp(-x^2)$  où  $\lambda$  est un réel quelconque.

7.  $x \rightarrow -1$  est une solution évidente de  $E_n$ . Donc les solutions de  $E_n$  sur les deux domaines d'intégration sont les applications de la forme  $x \rightarrow \lambda x^n \exp(-x^2) - 1$  où  $\lambda$  est un réel quelconque.

8. **Analyse :** Soit  $f$  définie de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et solution de  $E_n$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  est solution de  $E_n$  sur les intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  donc il existe  $\alpha$  et  $\lambda$  tels que :  $\forall x > 0 \ f(x) = \lambda x^n \exp(-x^2)$  et  $\forall x < 0 \ f(x) = \alpha x^n \exp(-x^2)$  donc  $\forall x > 0 \ f'(x) = \lambda (nx^{n-1} - 2x^{n+1}) \exp(-x^2)$  et  $\forall x < 0 \ f'(x) = \alpha (nx^{n-1} - 2x^{n+1}) \exp(-x^2)$

Si  $n \neq 1 \ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ .

Si  $n = 1 \ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lambda$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \alpha$  donc comme cette limite à gauche et à droite doit être égale à  $f'(0)$  alors on doit avoir  $\lambda = \alpha$ .

**Réciproquement :** si  $n = 1$  alors l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \lambda x e^{-x^2} - 1$  est bien définie de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et est bien de la forme des solutions sur  $]0, +\infty[$  et  $]0, +\infty[$ \*

$\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) = \lambda(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2})$  donc  $f'(0) = \lambda$  et  $f(0) = -1$  donc  $0 f'(0) - (1 - 2 \times 0^2) f(0) = (-1) \times (-1) = 1 = 1 - 2 \times 0$  donc  $f$  est solution en 0 donc sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $n \geq 2$  Soit  $\alpha$  et  $\lambda$  2 réels quelconques Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(0) = -1$   
 $\forall x > 0 : f(x) = \lambda x^n \exp(-x^2) - 1, \forall x < 0 : f(x) = \alpha x^n \exp(-x^2) - 1$ .  $f$  est bien de la forme des solutions de  $E_n$  sur  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$  et  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et sur  $]-\infty, 0[$ . De même que précédemment  $f$  est solution en 0. De plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0.

$\forall x > 0 : f'(x) = \lambda (nx^{n-1} - 2x^{n+1}) \exp(-x^2)$  et  $\forall x < 0 : f'(x) = \alpha (nx^{n-1} - 2x^{n+1}) \exp(-x^2)$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$

comme  $f$  est définie continue sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème de Lagrange on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  donc  $f$

est dérivable en 0 et sa dérivée est égale à 0.

comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$  alors  $f'$  est continue en 0, donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

### III

9.  $f_n(0) = -1 < 0$   $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1$  comme  $e < 3$  on a  $f(1) > 0$ .

10.  $\forall x \geq 0 \ f'_n(x) = (3nx^{n-1} - 6x^{n+1})e^{-x^2} = 3x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$ . Donc  $f'_n(x)$  est du même signe que  $n - 2x^2$  donc

s'annule en  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  est positif si  $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$  et négatif sinon  $\frac{x^n}{e^{x^2}} = \frac{(x^2)^{\frac{n}{2}}}{e^{x^2}}$  donc tend vers 0 donc  $f_n(x)$

tend vers  $-1$  en  $+\infty$  d'où le tableau de variations suivant :

|         |               |                         |                 |
|---------|---------------|-------------------------|-----------------|
| $x$     | 0             | $\sqrt{\frac{n}{2}}$    | $+\infty$       |
| $f'(x)$ | +             | 0                       | -               |
| $f(x)$  | -1 $\uparrow$ | $f(\sqrt{\frac{n}{2}})$ | $\downarrow$ -1 |

$f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$  donc est une bijection entre  $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$  et  $f([0, \sqrt{\frac{n}{2}}]) = [-1, f(\sqrt{\frac{n}{2}})]$  Or  $0 < 1 < \sqrt{\frac{n}{2}}$  donc  $0 < f(1) < f(\sqrt{\frac{n}{2}})$  donc 0 appartient à  $f([0, \sqrt{\frac{n}{2}}])$  donc il existe  $u_n$  unique de  $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$  tel que  $f(u_n) = 0$  comme  $f(u_n) = 0 < f(1)$  comme  $f$  est une bijection strictement croissante  $u_n < 1$ . On montre de même qu'il existe  $v_n$  unique de  $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$  tel que  $f(v_n) = 0$  car  $f$  strictement décroissante et continue sur  $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$ .

donc pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $n \geq 2$  il existe  $u_n$  et  $v_n$  uniques qui annulent  $f$  et tels que :  $u_n < 1 < \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$ .

**11**  $(v_n)_{n \geq 2}$  est minorée par la suite  $(\sqrt{\frac{n}{2}})_{n \geq 2}$  qui diverge vers  $+\infty$  donc diverge vers  $+\infty$ .

**12**

**a)**  $f_n(u_n) = 0$  donc  $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$  donc  $e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}$ .

**b)**  $f_{n+1}(x) = 3x^{n+1} e^{-x^2} - 1$  donc  $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = 3 \frac{u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1 < 0$  car  $u_n < 1$ .

**c)** Or  $f_{n+1}$  est une bijection strictement croissante sur  $[0, \frac{\sqrt{n+1}}{2}]$  donc comme  $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$  donc  $u_n < u_{n+1}$  la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

**d)**  $(u_n)$  est croissante et majorée par 1 donc est convergente vers  $l \leq 1$ .

**13**

**a)**  $f_n(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t^n e^{-t^2} = 1 \Leftrightarrow \ln(3t^n e^{-t^2}) = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3) + \ln(t^n) + \ln(e^{-t^2}) = 0$   
 $\Leftrightarrow \ln(3) + n \ln(t) - t^2 = 0 \Leftrightarrow g_n(t) = 0$ .

**b)** On a  $\ln(3) + n \ln(u_n) - u_n^2 = 0$  car  $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow g_n(u_n) = 0$ . Si  $(u_n)$  converge vers  $l \neq 1$  alors  $(\ln(u_n))$  converge vers  $\ln l < 0$  et  $(u_n^2)$  converge vers  $l^2$  donc  $(n \ln(u_n))$  diverge vers  $-\infty$  donc  $(\ln(3) + n \ln(u_n) - u_n^2)$  diverge vers  $-\infty$  ce qui est impossible car elle vaut toujours 0 donc  $l = 1$ .

**c)** On a  $\ln(3) + n \ln(u_n) - u_n^2 = 0$  donc  $\ln(3) + n \ln(1 + w_n) - (1 + w_n)^2 = 0$  donc en utilisant le D.L de  $\ln(1+x)$  jusqu'à l'ordre 1  $[\ln(1+x) = x + o(x)]$  on a  $\ln(3) + n(w_n + o(w_n)) - 1 - 2w_n - w_n^2 = 0$  donc

$$w_n(n - w_n + o(1) - 2) = 1 - \ln(3) \text{ donc } \frac{w_n n}{1 - \ln 3} = \frac{n}{n - w_n + o(1) - 2} \text{ donc tend vers 1 si } n \text{ tend vers}$$

$+\infty$  donc la suite  $(w_n)$  est équivalente à  $(\frac{1 - \ln 3}{n})$ .

**FIN**











