

CONCOURS COMMUN 2008
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

CORRECTION

Deuxième problème

Etude d'une fonction

21. f est bien définie sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x/x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\frac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ et donc $f(x)$ tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$, $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 et donc $f(x)$ tend vers 1. La courbe représentative de f admet ainsi les droites d'équation $x = 0$ et $y = 1$ pour droites asymptotes.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} e^{\ln x/x} = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{1/x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. Par suite, f est strictement croissante sur $]0, e[$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$. En particulier, f admet un maximum en e et ce maximum vaut $f(e) = e^{1/e}$.

22. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

23. Soit $x > 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{\ln x/x}}{x} = e^{(-1 + \frac{1}{x}) \ln x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 + \frac{1}{x}) \ln x = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. On en déduit que

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

24. f est continue et strictement croissante sur $]0, e]$. f réalise donc une bijection de $]0, e]$ sur $]f(0^+), f(e)] =]0, e^{1/e}]$. On note f^{-1} la réciproque de cette bijection.

25. f est continue sur $]0, e]$ et donc f^{-1} est continue sur $]0, e^{1/e}]$. f est dérivable sur $]0, e[$ et f' ne s'annule pas sur $]0, e[$. Par suite, f^{-1} est dérivable sur $]0, e^{1/e}[$. Mais $f'(e) = 0$ et donc f^{-1} n'est pas dérivable en $f(e) = e^{1/e}$.

f⁻¹ est continue sur $]0, e^{1/e}]$, dérivable sur $]0, e^{1/e}[$ mais non dérivable en $e^{1/e}$.

Etude d'une suite

26. Pour tout réel t , $\Phi_1(t) = 1^t = 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 1$. Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$.

27. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction Φ_x est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en le réel $h(x)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $t_{n+1} = \Phi_x(t_n)$, on obtient $h(x) = \Phi_x(h(x))$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \Phi_x(h(x)).$$

En particulier, pour tout réel x , on a $h(x) > 0$ et $h(x) = x^{h(x)}$. Mais alors $f(h(x)) = h(x)^{1/h(x)} = (x^{h(x)})^{1/h(x)} = x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(h(x)) = x.$$

28. Soit $x > 1$. Φ_x est la fonction exponentielle de base x et puisque $x > 1$, on sait que Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

29. Soit $x > 1$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < t_{n+1}$.

- $t_1 = \Phi_x(t_0) = x^1 = x > 1 = t_0$ et l'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $t_n < t_{n+1}$. Puisque la fonction Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t_{n+1} = \Phi_x(t_n) < \Phi_x(t_{n+1}) = t_{n+2}.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n < t_{n+1}$.

$$\text{si } x > 1, \text{ la suite } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}$$

30. Soit $x \in]1, e^{1/e}]$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq e$.

- $t_0 = 1 \leq e$ et l'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $t_n \leq e$. Puisque la fonction Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t_{n+1} = \Phi_x(t_n) < \Phi_x(e) = x^e \leq (e^{1/e})^e = e.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq e$. Mais alors, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par e . La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente.

$$\text{si } x \in]1, e^{1/e}], \text{ la suite } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente.}$$

31. Soit $x \in]e^{1/e}, +\infty[$. Supposons par l'absurde que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. D'après la question 27., le réel $h(x)$ vérifie $f(h(x)) = x$. Mais alors $x \in f(]0, +\infty[)$ et d'après la question 21., $x \leq e^{1/e}$. Ceci est une contradiction et donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Plus précisément, puisque la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$.

$$\text{si } x \in]e^{1/e}, +\infty[, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

32. Soit $x \in]0, 1[$. Φ_x est la fonction exponentielle de base x avec $x < 1$ et dans ce cas, la fonction Φ_x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Mais alors, la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

33. Soit $x \in]0, 1[$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2n+1} < t_{2n}$.

- $t_1 = x < 1 = t_0$ et l'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $t_{2n+1} < t_{2n}$. Puisque la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$t_{2n+3} = \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n+1}) < \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}) = t_{2n+2}.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} < t_{2n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} < t_{2n}.$$

34. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\text{sgn}(t_{2n+4} - t_{2n+2}) = \text{sgn}(\Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n+2}) - \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n})) = \text{sgn}(t_{2n+2} - t_{2n}).$$

Ceci montre que la suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. De plus,

$$t_2 = \Phi_x \circ \Phi_x(t_0) = x^{(x^1)} = e^{x \ln x} < 1 = t_0 \text{ car } x \in]0, 1[,$$

et la suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $t_{2n} > t_{2n+2}$. Puisque la fonction Φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $t_{2n+1} = \Phi_x(t_{2n}) < \Phi_x(t_{2n+2}) = t_{2n+3}$ et donc la suite $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

La suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

35. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_1 \leq t_{2n+1} \leq t_{2n} \leq t_0$. Mais alors, la suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par t_1 et de même, la suite $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par t_0 . On en déduit que les deux suites $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

Les deux suites $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \Phi_x \circ \Phi_x(u_n)$ (*). Soit ℓ la limite d'une telle suite. Par continuité de la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$ et donc en ℓ , quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on obtient $\ell = \Phi_x \circ \Phi_x(\ell)$ et donc ℓ est un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $t_n = \Phi_x(t_{n-1}) \in [0, 1]$ et donc les limites des suites $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $[0, 1]$.

Détermination des points fixes

36. Soit $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Alors, $-1 \leq \ln x < 0$ puis $0 < (\ln x)^2 \leq 1$ et donc

$$g'(0) = (\ln x)^2 x - 1 \leq x - 1 < 0.$$

Mais alors, puisque la fonction g' est décroissante sur $[0, 1]$ et que $g'(0) < 0$, la fonction g' est strictement négative sur $[0, 1]$ et donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1]$. En particulier, l'équation $g(t) = 0$ a au plus une solution dans $[0, 1]$ ou encore la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ a au plus un point fixe et donc exactement un point fixe dans $[0, 1]$ ($\Phi_x \circ \Phi_x$ a au moins un point fixe dans $[0, 1]$ puisque la suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tel point).

On en déduit que les suites $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont même limite. On sait alors que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Si $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

37. Soit $x \in \left[e^{-e}, \frac{1}{e}\right]$. Alors, $-e \leq \ln x < -1$ puis $1 \geq -\frac{1}{e} \ln x > \frac{1}{e}$ et finalement $\beta = -\frac{1}{e} \ln x - 1 \leq 0$. La fonction g' est donc négative sur $[0, 1]$ et même strictement négative sur $[0, 1] \setminus \{\alpha\}$. La fonction g est de nouveau strictement décroissante sur $[0, 1]$ et comme à la question précédente

Si $x \in \left[e^{-e}, \frac{1}{e}\right]$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

38. D'après le résultat admis au début de la page 4, $g'(p) = (\ln x)^2 \Phi_x(p)(\Phi_x \circ \Phi_x)(p) - 1 = (\ln x)^2 \times p \times p - 1 = (p \ln x)^2 - 1$. Mais l'égalité $\Phi_x(p) = p$ fournit $x^p = p$ et donc $p \ln x = \ln p$. Finalement, $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$.

Puisque $p < \frac{1}{e}$, on a $\ln p < -1$ puis $(\ln p)^2 > 1$ et finalement $g'(p) > 0$. Le tableau de variations de g montre alors que $\gamma < p < \delta$.

Puisque g est strictement croissante sur $[\gamma, \delta]$, l'équation $g(t) = 0$ admet exactement une solution dans $[\gamma, \delta]$ à savoir p . D'autre part, $g(0) \times g(\gamma) = x \times g(\gamma) < 0$ et puisque g est continue et strictement croissante sur $[0, \gamma]$. L'équation $g(t) = 0$ admet une et une seule solution p_1 dans $[0, \gamma]$ telle que $0 < p_1 < \gamma$.

Enfin, $g(1) = x^x - 1 < 0$ car $x < 1$ et $g(\delta) > 0$. Puisque de plus g est continue et strictement décroissante sur $[\delta, 1]$, l'équation $g(t) = 0$ admet une et une seule solution p_2 dans $[\delta, 1]$ telle que $\delta < p_2 < 1$.

En résumé, l'équation $g(t) = 0$ admet trois solutions p_1, p et p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$ ou encore

$\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes p_1, p et p_2 vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

39. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, p_2 \leq t_{2n}$.

- $t_0 = 1 > p_2$ et l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p_2 \leq t_{2n}$. Alors puisque la fonction $\Phi_x \circ \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $p_2 = \Phi_x \circ \Phi_x(p_2) \leq \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}) = t_{2n+2}$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, p_2 \leq t_{2n}$.

Mais alors, la suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ (d'après la question 35.) qui est élément de $[p_2, 1]$. Cette limite ne peut être que p_2 et donc

Si $x \in]0, e^{-e}[$, la suite $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers p_2 .

40. Supposons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $t_{2n_0+1} > p$. Puisque la fonction Φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $t_{2n_0+2} = \Phi_x(t_{2n_0+1}) \leq \Phi_x(p) = p$. Ceci contredit le résultat de la question précédente et donc $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} \leq p$.

La suite $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers p_1 ou p . Mais alors les suites extraites $(t_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes. On en déduit que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Si $x \in]0, e^{-e}[$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

FIN

