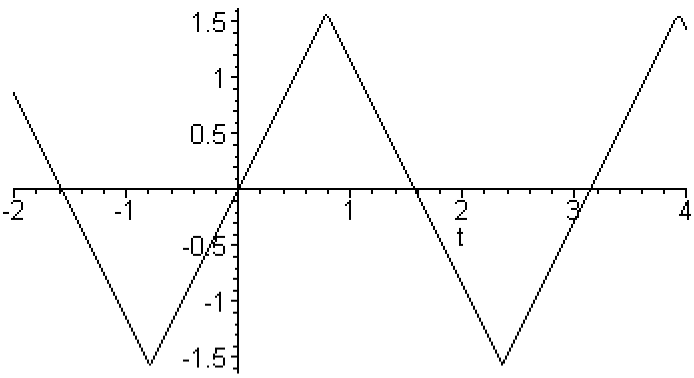
Correction

1.a $\forall t\in\mathbb{R}, -t\in\mathbb{R}$ et $\varphi(-t)=\cdots=-\varphi(t)$ donc φ est impaire.
$\forall t\in\mathbb{R}, t+\pi\in\mathbb{R}$ et $\varphi(t+\pi)=\arcsin(\sin(2t+2\pi))=\varphi(t)$ donc φ est π périodique.

1.b Pour $t\in[0,\pi/4]$, on a $2t\in[0,\pi/2]\subset[-\pi/2,\pi/2]$ donc $\varphi(t)=\arcsin(\sin 2t)=2t$.
Pour $t\in[\pi/4,\pi/2]$, on a $2t\in[\pi/2,\pi]$. Puisque $\sin 2t=\sin(\pi-2t)$ et que $\pi-2t\in[0,\pi/2]\subset[-\pi/2,\pi/2]$ on a $\varphi(t)=\pi-2t$.

1.c De part les simplifications qui précèdent, l'imparité et la périodicité, on obtient l'allure ci-dessous :



2.a $(1+x)^2\geq 0$ donne $-2x\leq 1+x^2$ et $(1-x)^2\geq 0$ donne $2x\leq 1+x^2$. Par suite $|2x|\leq 1+x^2$.

2.b Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+x^2\neq 0$ donc $\dfrac{2x}{1+x^2}$ existe et par la question précédente $\dfrac{2x}{1+x^2}\in[-1,1]$, or la fonction $\arcsin$ est définie sur $[-1,1]$ donc $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ existe. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

2.c f est impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3.a $\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\dfrac{2\dfrac{\sin t}{\cos t}}{1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\dfrac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\sin 2t$ et $f(\tan t)=\arcsin\sin 2t=\varphi(t)$.

3.b $f(x)=f(\tan(\arctan x))=\varphi(\arctan x)$.

3.c La fonction $\arctan$ est croissante sur $]-\infty,-1]$ à valeurs dans, $]-\pi/2,-\pi/4]$ où φ est décroissante donc par composition f est décroissante sur $]-\infty,1]$.
La fonction $\arctan$ est croissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans, $[-\pi/4,\pi/4]$ où φ est croissante donc par composition f est croissante sur $[-1,1]$.
La fonction $\arctan$ est croissante sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans, $[\pi/4,\pi/2[$ où φ est décroissante donc par composition f est décroissante sur $[1,+\infty[$.

3.d

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

Limites et valeurs sont immédiates sachant $\arcsin 1=\pi/2$ et $\arcsin 0=0$.

4.a Sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ on a $\dfrac{2x}{1+x^2}\in]-1,1[$ et la fonction $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ donc f est dérivable sur le domaine considéré et, après calculs : $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } |x|<1\\ \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{si } |x|>1\end{cases}$.

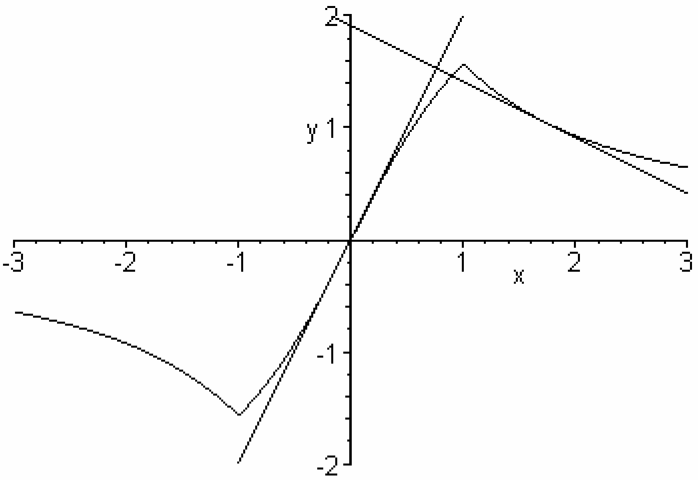
4.b $f(0)=0$ et $f'(0)=2$ donc la tangente en 0 a pour équation $y=2x$.

$f(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$ et $f'(\sqrt{3})=-1/2$ donc la tangente en $\sqrt{3}$ a pour équation $y=-\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{3})+\dfrac{\pi}{3}$.

$f(1/\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$ et $f'(1/\sqrt{3})=3/2$ donc la tangente en $1/\sqrt{3}$ a pour équation $y=\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+\dfrac{\pi}{3}$.

4.c $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=-1$.

4.d



5.a $f(x)=h\Leftrightarrow\dfrac{2x}{1+x^2}=\sin h$ (l'équivalence est vraie car $h\in\left]0,\pi/2\right[$)

Les solutions de l'équation $\dfrac{2x}{1+x^2}=\sin h$ sont $x_1=\dfrac{1-\cos h}{\sin h}$ et $x_2=\dfrac{1+\cos h}{\sin h}$.

5.b Le point I a pour coordonnée $\begin{cases}x=1/\sin h\\ y=h\end{cases}$.

Les coordonnées du point I vérifie $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ et $x>1$.

La représentation graphique de la fonction $x\mapsto\arcsin x$ sur $\left]-1,+\infty\right[$ donne le lieu des points I.

Cette représentation est aisée car

x	1		$+\infty$
$\arcsin\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

: