Développements limités
et
comparaison de fonctions
Résumé

I) Comparaison de fonctions

Déf 1 (équivalence)

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et ssi :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Notation

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{\sim} g$$

Prop 2 (Équivalents usuels au voisinage de 0)

1) $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$; 6) $(e^x - 1) \underset{x \to 0}{\sim} x$

2) $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$; 7) $(\cos x - 1) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$

3) $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$; 8) $(\mathrm{ch}(x) - 1) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

4) $\mathrm{th}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$; 9) $\ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} (x-1)$

5) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Déf 3 (négligeable)

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et ssi :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notations

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \text{ ou } f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \text{ ou } f \underset{a}{=} o(g)$$

Déf 4 (Domination)

On dit que f est dominée par g au voisinage de a si et ssi $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Notations

$$f(x) \underset{a}{=} O(g(x)) \text{ ou } f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \text{ ou } f \underset{a}{=} O(g)$$

2) Propriétés

Prop 1

1) $f(x) \underset{a}{=} o(1) \iff \lim_{x\to a} f(x) = 0$

2) $f(x) \underset{a}{=} O(1) \iff f$ est bornée au voisinage de a.

3) Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$f(x) \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Réflexe

$$o(1) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Prop 2

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Longrightarrow f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$$

Prop 3

1) $\begin{pmatrix} f_1(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \\ f_2(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \end{pmatrix} \Longrightarrow f_1(x) + f_2(x) \underset{a}{=} o(g(x))$

2) $f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \iff f(x) \underset{a}{=} g(x) \times o(1)$

3) $f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Rightarrow h(x) f(x) \underset{a}{=} o(h(x)\, g(x))$

Réflèxes

1) $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$

2) $h(x) \cdot o(g(x)) = o(h(x) \cdot g(x))$

3) $g(x) \cdot o(1) = o(g(x))$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda \cdot o(g(x)) = o(g(x))$

<u>Par exemple :</u> $-o(g(x)) = o(g(x))$

NB : Idem pour "O"

1) $O(g(x)) \pm O(g(x)) = O(g(x))$

2) $h(x) \cdot O(g(x)) = O(h(x) \cdot g(x))$

Prop 4

1) $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$

2) $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$

3) $\left(f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \underset{a}{\sim} h(x)\right) \Rightarrow f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$

4) $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$

5) $\begin{pmatrix} f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x) \end{pmatrix} \Rightarrow f_1(x) f_2(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) g_2(x)$

6) $\begin{pmatrix} f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x) \end{pmatrix} \Longrightarrow \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$

Prop 5 (équivalent d'un polynôme en $\pm\infty$)

$$\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p\right) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_p x^p$$

où $a_p \neq 0$

Prop 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Supposons que $f > 0$ et $g > 0$ au voisinage de a. On a :

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Longrightarrow \left(f(x)\right)^\alpha \underset{a}{\sim} \left(g(x)\right)^\alpha$$

Prop 7

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Prop 8

Supposons que $\lim\limits_{x \to a} U(x) = 0$, alors on a :

1) $\sin(U(x)) \underset{x \to a}{\sim} U(x)$

2) $sh(U(x)) \underset{x \to a}{\sim} U(x)$

3) $\tan(U(x)) \underset{x \to a}{\sim} U(x)$

4) $\text{th}(U(x)) \underset{x \to a}{\sim} U(x)$

5) $\ln(1+U(x)) \underset{x \to a}{\sim} U(x)$

Prop 9

Ici $a \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est dérivable en a, et que $f'(a) \neq 0$.

On a :
$$\left(f(x) - f(a)\right) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

---

3) Applications

Prop 1 (Calcul de limites)

Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$

« sous réserve d'existence des limites »

Prop 2 (Signe)

Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a.

II) Développements limités

1) Généralités

Déf 4

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a si et seulement s'il existe $C_0, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} C_0 + C_1(x-a) + \cdots + C_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Prop 2 (Unicité du développement limité)

Si f admet un dév limité à l'ordre n au voisinage de a alors celui-ci est unique.

Autrement dit :

$\exists!\,(C_0, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{a}{=} C_0 + C_1(x-a) + \cdots + C_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Vocabulaire et notation

Supposons que f admet un dév limité d'ordre n au voisinage de a.

1) L'expression $f(x) \underset{a}{=} C_0 + C_1(x-a) + \cdots + C_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$ s'appelle le développement limité à l'ordre n au voisinage de a.

On le note : $DL_n(a)$.

2) Le polynôme $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ s'appelle la partie régulière de ce dév limité et $o(x-a)^n$ s'appelle son reste.

Cas particuliers

1) Le $DL_1(a)$ est de la forme :

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + o(x-a)$$

2) Le $DL_0(a)$ est de la forme :

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + o(1)$$

3) Le $DL_n(0)$ est de la forme :

$$f(x) \underset{0}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

Càd : $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$

Corollaire 3

Supposons que 0 est un point intérieur à I.

Si f est une fonction paire (respectivement impaire) alors dans le $DL_n(0)$, seules les puissances paires (respectivement impaire) qui vont figurer.

Prop4

Si f admet un $DL_n(a)$, alors f admet un $DL_p(a)$, pour tout $p \leq n$, dont la partie régulière est celle du $DL_n(a)$ tronquée à l'ordre p.

Prop 5 (Continuité et dérivabilité)

Ici a réel de I.

1) i) f continue en a $\Longleftrightarrow$ f admet un $DL_0(a)$

ii) Dans ce cas, on a : $C_0 = f(a)$

2) i) f dérivable en a $\Longleftrightarrow$ f admet un $DL_1(a)$

ii) Dans ce cas, on a : $\boxed{\begin{array}{l} C_0 = f(a) \\ C_1 = f'(a) \end{array}}$

2) Développements limités usuels en 0

Premiers développements limités usuels

Prop 1 (Formule de Taylor-Young)

Soient $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si f est de classe C^n sur I alors f admet en a le $DL_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$$

C'àd :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Cas particulier très important (cas de $a=0$)

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

C'àd

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

NB

Si $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, alors f admet en tout point a de I un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

3) Opérations sur les DL

a) Combinaison linéaire

Prop

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si f et g admettent des $DL_n(a)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, alors $(\alpha f + \beta g)$ admet aussi un $DL_n(a)$ de partie régulière $(\alpha P_n(x) + \beta Q_n(x))$.

b) Produit de deux DL

Prop

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$.

Si f et g admettent des $DL_n(a)$ de parties régulières respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, alors $(f \cdot g)$ admet aussi un $DL_n(a)$ de partie régulière $(P_n(x)\, Q_n(x))$ qu'on tronque à l'ordre n.

c) Quotient de deux DL

Exemple

1) i) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\frac{1}{Ch(x)}$.

ii) En déduire le $DL_3(0)$ de $th(x)$

2) Procéder de même et déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan(x)$.

Solution

1) i) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\frac{1}{Ch(x)}$?

$$\frac{1}{Ch(x)} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$$

$\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$ est la composée des deux DL $\frac{1}{1+x}$ et $\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$.

On a $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1-x+x^2-x^3+o(x^3)$

$$\boxed{\text{La règle consiste à remplacer dans } (1-x+x^2-x^3) \text{ } x \text{ par } \frac{x^2}{2} \text{ et tronquer à l'ordre 3 voulu.}}$$

à retenir

Ainsi :

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}_{\text{on tronquera à l'ordre 3 voulu.}}+o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\frac{1}{Ch(x)} = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

fin

ii) En déduire le $DL_3(0)$ de $th(x)$?

$th(x) = sh(x) \times \dfrac{1}{Ch(x)}$; produit de deux DL qu'on connait :

$$\begin{cases} sh(x) \underset{0}{=} x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3) \\ \dfrac{1}{Ch(x)} = 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3) \end{cases}$$

D'où :

$$th(x) = \underbrace{\left(x+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} + o(x^3)$$

On développe, et on tronque à l'ordre 3 voulu.

Enfin :

$$\boxed{th(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

Fin

2) Procéder de même et détérminer le $DL_3(0)$ de $\tan(x)$?

On trouve :

$$\boxed{\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

Fin

(Dév limité d'une fonction polynomiale)

Considérons le polynôme $P(x) = 2 - x + 3x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4$.

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de $P(x)$.

2) Déterminer le $DL_5(0)$ de $P(x)$.

Solution

$$P(x) = 2 - x + 3x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 .$$

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de $P(x)$ est :

$$P(x) = 2 - x + 3x^2 + x^3 + o(x^3)$$

2) Déterminer le $DL_5(0)$ de $P(x)$ est :

$$P(x) = 2 - x + 3x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$$

4) Intégration terme à terme d'un développement limité

Prop (intégration terme à terme d'un Dév Limité)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$.

Supposons que f est dérivable en a.

Si f' admet le $DL_n(a)$

$$f'(x) \underset{a}{=} C_0 + C_1(x-a) + \cdots + C_n(x-a)^n + o(x-a)^n$$

Alors f admet le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + C_0(x-a) + C_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + C_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o(x-a)^{n+1}$$

Cas particulier important $(a=0)$

Si f' admet le $DL_n(0)$

$$f'(x) \underset{0}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

Alors f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

On tire par suite de nouveaux DL usuels ; voir ci-après

5) Applications des développements limités

a) Calcul de limites

Exemple 1

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ch(x) - 1}{e^x - 1 - x}$

Solution

On fait via les DL :

On a $\begin{cases} ch(x) - 1 \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \\ e^x - 1 - x \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases}$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{ch(x)-1}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

(On simplifie par $x^2/2$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+o(1)}{1+o(1)}$$

$$= 1 \qquad \left(o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \right)$$

b) Détermination d'un équivalent simple d'une fonction

Prop

$a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet le $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} C_p (x-a)^p + \cdots + C_n (x-a)^n + o(x-a)^n$$

où $C_p \neq 0$

Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} C_p (x-a)^p$

Cas particulier $(a=0)$

Si $f(x) \underset{0}{=} C_p x^p + \cdots + C_n x^n + o(x^n)$, avec $C_p \neq 0$

Alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} C_p x^p$

Autres exemples

Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ en 0 dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{x\,Ch(x) - \sin x}{1 - \cos x}$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{Ch(x) - 1}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$

4) $f(x) = \arctan(2x) - 2\arctan x$

C) Détermination de l'équation de la tangente et de sa position par rapport à la courbe

Exemple

$f(x) = \ln(2 + x + x^2)$

1) $D_f = ?$

2) Déterminer, via les DL, une équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$, ainsi que leurs positions relatives au voisinage de 0.

Solution

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) \underset{0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ (après calculs)

$\Rightarrow (T_0) : y = \ln(2) + \frac{x}{2}$

Pour la position relative, on étudie le signe de la différence : $f(x) - \left(\ln(2) + \frac{x}{2}\right)$ au voisinage de 0.

On a : $f(x) \underset{0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow f(x) - \left(\ln(2) + \frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{3}{8}x^2$

Or $\frac{3}{8}x^2$ positif

D'où $f(x) - \left(\ln(2) + \frac{x}{2}\right)$ positif aussi au voisinage de 0.

Enfin :

(C_f) est au-dessus de la tangente (T_0) au voisinage de 0

Fin

d) Détermination de l'équation d'une asymptote oblique et de sa position par rapport à la courbe

Rappel

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

2) (C_f) possède la droite "$y = ax+b$" comme asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$$

1) $D_f = ?$

2) Démontrer, via les DL, que C_f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et préciser leur position relative.

Solution

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $x \to +\infty \iff \frac{1}{x} \longrightarrow 0$

Posons $t = \frac{1}{x}$ (On a $x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$).

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{t^3}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - \frac{1}{t} + 1} \quad \left(\text{Car } x = \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{t^3}}{\frac{1 - t + t^2}{t^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{t - t^2 + t^3}$$

Pour $x \to +\infty$, on a $t \to 0$ et on appliquera le dév limité au voisinage de 0 "$t \to 0$" qu'on maitrise.

$$\frac{1}{t - t^2 + t^3} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - t + t^2}$$

$$\frac{1}{1 - t + t^2} = \frac{1}{1 + (-t + t^2)} \qquad \frac{1}{1+t} \underset{0}{=} 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$$

$$= 1 - (-t + t^2) + (-t + t^2)^2 - (-t + t^2)^3 + o(t^3)$$

$$\frac{1}{1 - t + t^2} \underset{t \to 0}{=} 1 + t - t^3 + o(t^3)$$

$$\frac{1}{t - t^2 + t^3} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - t + t^2} \quad \text{donne:}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$\boxed{\frac{1}{t-t^2+t^3} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}+1-t^2+o(t^2)}$$

Remplaçons enfin : $\frac{1}{t}=x$ (ou $t=\frac{1}{x}$), on aura :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+1-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$$

D'où (C_f) possède la droite d'équation $\boxed{y=x+1}$

Comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Position relative :

$$f(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$$

et $-\frac{1}{x^2}<0$

D'où $f(x)-(x+1)<0$ au voisinage de $+\infty$.

Enfin :

(C_f) en dessous de l'asymptote oblique $(y=x+1)$ au voisinage de $+\infty$.

Développements limités usuels

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$sh(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$sh(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$(1+x)^{\alpha} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)\right] \cdot \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^{\alpha} \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$-\ln(1-x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$-\ln(1-x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{argth}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{argth}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Fin