

EPREUVE DES PETITES MINES, COMMUNE, 1995

EXTRAIT

Problème 2

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément!) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, $\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}$, $T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$.

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme. Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P .
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .
ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n noté Δ_n .
- (b) i. Déterminer $\text{Ker } \Delta_n$.
ii. En déduire le rang de Δ_n . Déterminer $\text{Im } \Delta_n$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1) \cdots (x-k+1)}{k!}$$

- (a) i. Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geq 0}$.
ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.
- (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ est une base de E_n .
ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$, où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $(T^k(f))(x)$.
(b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.
 - i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - \text{Id}_{\mathcal{F}}$).
 - ii. En déduire que $(\Delta^j(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \dots, j : f(0), f(1), \dots, f(j)$.

Partie II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose :

$$N(x) = \prod_{j=0}^n (x-j) = x(x-1) \cdots (x-n)$$

1. (a) Soit l'application linéaire Φ définie sur E_n à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui à P associe $(P(0), \dots, P(n))$.
Montrer que Φ est un isomorphisme.
(b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f .
2. (a) Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.
(b) En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j .
3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note :

$$M_n = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(t) \right| : t \in [0, n] \right\}$$

(a) Soit $x \in [0, n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists c \in]0, n[\quad f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$$

(On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.)

(b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, n] \quad |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{1}{n+1} M_n$$

(On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$).

FIN EXTRAIT

