CCP MP1 2018
Un corrigé

1 "Permutation limite-intégrale" et intégrales de Gauss

1.1 Utilisation d'une série entière

Q.1. La fonction exp est développable en série entière entière de rayon de convergence infini et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2, on en déduit que

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}\, dx$$

$f_n\ :\ x \mapsto (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}$ est continue sur $[0,1]$ et $\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k!}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,1]$. On est dans le cas simple où l'interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\, dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}}$$

Q.2. $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s'applique à la série $\sum(u_k)$. Elle indique que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

Ceci s'écrit exactement

$$\boxed{|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}}$$

Q.3.
```
def factorielle(n):
    if n==0: return 1
    else: return (factorielle (n-1))*n
```

Q.4. On calcule les termes u_k définis en question 2 tant le module du terme est inférieur à 10^{-6}.

```
def u(k):
    return (-1)**k/((2*k+1)*factorielle(k))

k=0
while abs(u(k))>10**(-6):
    k=k+1

print(k)
```

1.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q.5. Soit $x \geq 0$. $x^2/n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour ces n, $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \to +\infty$, à $n \times \left(-\frac{x^2}{n}\right) = -x^2$ et tend donc vers $-x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \to e^{-x^2}$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simpelment sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers } x \mapsto e^{-x^2}}$$

Q.6. Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x^2/n \in [0,1]$. Si $x^2/n \in [0,1[$ alors (croissance de exp et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{-x^2}$ dans ce cas). Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}}$$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.
- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction continue sur $[0,1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k\ dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}}$$

2 Notion de polynôme interpolateur

2.1 Existence du polynôme interpolateur

Q.7. x_k est racine de l_i pour $i \neq k$ et $l_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \ldots, x_n$.
Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P - L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \ldots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leq n$ ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0, \ldots, x_n}$$

2.2 Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. Une première fonction `l(i,x,a)` permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x_k.

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k!=i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r
```

Il reste à calculer la somme définissant L_n associé aux y_i.

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q.9. La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.
Dans la résolution par méthode de Gauss,
- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait appraître des zéros par $n-1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes $2, \ldots, n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \ldots, x_0$ en $O(1+2+\cdots+(n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3)}$$

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q.10. Montrons par récurrence (finie) que la propriété : "$\phi^{(k)}$ s'annule $p+1-k$ fois" est vraie pour $k = 0, \ldots, p$.
- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ.
- Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On note $y_1 < \cdots < y_{p+1-k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \ldots, p-k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p-k$ annulations et lerésultat est vrai au rang $k+1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a,b[$.

$$\boxed{\text{si } \phi\ :\ [a,b]\to\mathbb{R} \text{ s'annule } p+1 \text{ fois, il existe } c\in]a,b[\text{ tel que } \phi^{(p)}(c)=0.}$$

Q.11. $f-L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ. Pour $x\in\sigma$, $\mathcal{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a,b[$).

$$\boxed{\text{pour tout } x\in\sigma, \text{ la propriété } \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.12. Comme $x\notin\sigma$, $\pi_\sigma(x)\neq 0$ et on peut donc poser

$$\boxed{\lambda=\frac{f(x)-L_n(f)(x)-F(x)}{\pi_\sigma(x)}}$$

et on a alors $F(x)=0$.

Q.13. F s'annule (comme $f-L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x\notin\sigma$. On a donc $n+1$ points d'annulation au moins.

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$$

On en déduit avec Q.10 que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x\in]a,b[$. Comme $L_n(f)\in\mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle. Comme π_σ est unitaire de degré $n+1$, sa dérivée $n+1$-ième est le polynôme constante $(n+1)!$. On en déduit que $\lambda=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x)=0$, on obtient $\mathcal{P}_x$.

$$\boxed{\forall x\in[a,b],\ \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.14. $\boxed{f^{(n+1)} \text{ est continue sur le segment } [a,b] \text{ et donc bornée sur ce segment}}$.
On remarque que

$$\forall x\in[a,b],\ |\pi_\sigma(x)|\leq(b-a)^n$$

Avec la propriété $\mathcal{P}_x$, on en déduit que

$$\boxed{\|f-L_n(f)\|_\infty\leq\tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty}$$

Q.15. On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0,2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n=\{x_0,\dots,x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme sin et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$\|f-L_n(f)\|_{\infty,[0,2\pi]}\leq\frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le majorant est de limite nulle et ainsi

$$\boxed{(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,2\pi]}$$

Q.16. On sait que

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$$

Quand une fonction est développable en série entière, son développement est nécessairement celui de Taylor. Ainsi

$$\forall k\in\mathbb{N},\ f^{(2k)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

On en déduit que $\|f^{(2k)}\|_\infty\geq|f(0)|\geq(2k)!$ (la norme infinie existe puisque f est de classe C^∞ sur le segment $[-1,1]$).

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty\geq(2k)!}$$

3 Famille de polynômes orthogonaux

Q.17. Comme $\langle 1,1\rangle = 2$, on a $\boxed{P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$. On calcule alors

$$Q_1 = X - \langle X, P_0\rangle P_0 = X \quad \text{et} \quad \langle X, X\rangle = \frac{2}{3}$$

pour en déduire que $\boxed{P_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X}$

Q.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, \dots, P_n)$ étant orthonormée, P_n est orthogonal aux P_i avec $i \le n-1$ et donc à l'espace engendré par ces polynômes, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par ailleurs $P_n \in \mathrm{Vect}(1, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \notin \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ est libre). Ainsi, P_n est de degré n.

$$\boxed{P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \text{ et } \deg(P_n) = n}$$

Q.19. Comme $n \ge 1$, $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle P_n, 1\rangle = 0$ i.e. $\boxed{\int_{-1}^1 P_n(t)\,dt = 0}$.
Si, par l'absurde, P_n n'admettait pas de racine dans $[-1,1]$ alors (théorème des valeurs intermédiaires avec P_n continu), P_n serait de signe constant sur $[-1,1]$. Avec la continuité de P_n et $\int_{-1}^1 P_n(t)\,dt = 0$, ceci entraînerait la nullité de P_n sur $[-1,1]$. P_n serait alors le polynôme nul (infinité de racine) ce qui est faux.

$$\boxed{P_n \text{ admet au moins une racine dans } [-1,1]}$$

Q.20. Par choix de Q, H n'admet que des racines de multiplicité paire. Sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit alors

$$H = a\prod_{i=1}^k (X-\alpha_i)^{2m_i} H_1(X)$$

où H_1 est un produit de polynômes de degré 2, unitaires, à discriminant < 0. H est alors de signe constant (selon le signe du coefficient dominant c).
Par ailleurs, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $p < n$) et donc $\langle P_n, Q\rangle = 0$, c'est à dire $\boxed{\int_{-1}^1 H(t)\,dt = 0}$.
Comme ci-dessus (continuité, intégrale nulle, signe constant), ceci entraîne la nullité de H (sur $[-1,1]$ puis comme polynôme) et une absurdité (car ni P_n ni Q n'est nul et $\mathbb{R}[X]$ est intègre).
On peut en fait reprendre le raisonnement en ne considérant que les racines de multiplicité impaire dans $[-1,1]$. On prouve alors par l'absurde qu'il y a n racines de multiplicité impaire dans $[-1,1]$. Comme $\deg(P_n) = n$, les multiplicités valent 1 et on a toute les racines.

$$\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines simples dans } [-1,1]}$$

4 Méthodes de quadrature

Q.21. Le changement de variable affine (et donc licite) $t = 2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} - 1$ donne

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\,dt$$

ce qui est la formule demandée.

Q.22. Comme $l_i(x_k) = \delta_{i,k}$, on a $J(l_i) = \alpha_i = \int_{-1}^1 l_i(t)\,dt$. $P \mapsto \sum_{i=0}^n \alpha_i P(t_i) - \int_{-1}^1 P(t)\,dt$ est linéaire et nulle en $l_0, \dots, l_n$ et donc sur $\mathrm{Vect}(l_0, \dots, l_n) = \mathbb{R}_n[X]$ (tout polynôme P de degré $\le n$ est combinaison des l_i puisque $P = \sum_{i=0}^n P(t_i)l_i$). Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ dt}$$

Q.23. On a $l_0 = -\frac{1}{2}(X-1)$ et $l_1 = \frac{1}{2}(X+1)$ et donc (calcul d'intégrale élémentaire)

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 1}$$

$2\alpha_0 g(0)$ est l'aire du rectangle $[-1,1]\times[0,g(-1)]$ et $2\alpha_1 g(1)$ celle du rectangle $[-1,1]\times[0,g(1)]$. La demi-somme de ces quantités est l'aire du trapèze $((-1,0),(-1,1),(1,g(1)),(-1,g(-1)),(-1,0))$. Ceci explique le nom de la méthode.

Quadrature de Gauss

Q.24. On a d'une part (les t_i sont des racines de P_{n+1})

$$J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q(t_i) P_{n+1}(t_i) = 0$$

D'autre part, comme P est de degré $\leq 2n+1$ et P_{n+1} de degré $n+1$, le quotient Q est de degré $\leq n$ et donc orthogonal à P_{n+1}. Ainsi

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1}Q(t)\ dt = 0$$

On a donc

$$\boxed{J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\ dt = 0}$$

Comme J est linéaire, on a aussi $J(P) = J(QP_{n+1}) + J(R)$. De plus $J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\ dt$ car R est de degré $\leq n$. Ainsi

$$J(P) = J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\ dt + \int_{-1}^{1} R(t)\ dt = \int_{-1}^{1} (Q(t)P_{n+1}(t) + R(t))\ dt$$

et donc

$$\boxed{J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ dt}$$

Q.25. Fixons $i \in [\![0,n]\!]$ et posons $P = \prod_{k\neq i} (X-t_k)^2$. $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et donc

$$\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = J(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(t_k) = \alpha_i P(t_i)$$

Comme P est continue, positive et non nulle sur $[-1,1]$, son intégrale sur $[-1,1]$ est > 0. De même $P(t_i) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall i,\ \alpha_i > 0}$$

On remarque enfin que la somme des α_i vaut $J(1)$ et comme $1 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $J(1) = \int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 2}$$