11) $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ étant un espace préhilbertien réel.

Supp que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base du sev F de E et $x \in E$.

On a :

$$\boxed{x \in F^\perp \iff (\forall\, 1 \le i \le p,\ \langle x | \varepsilon_i \rangle = 0)}$$

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ esp préhilbertien.

F sev de E.

$x \in E$.

Déf) $x \in F^\perp \overset{\text{déf}}{\iff} (\forall a \in F,\ \langle x | a \rangle = 0)$

Prop)

ici

2) Déterminer $d(x,F)$, où $x = (1,1,1,1)$

$\langle A | E_{ij} \rangle = A_{ij}$

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = tr({}^tA.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la bas[e] canonique est orthonormée. On note $||.||$ la norme associée.
2) Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}||A||$$

3) Quel l'orthogonal de S, l'espace des matrices symétriques ?

⟨Cas à savoir⟩

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une $\boxed{\text{bon}}$ de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. $\longrightarrow x_i = \langle x | e_i \rangle$

On a : $\left(\forall i \in [\![1,n]\!], \langle x | e_i \rangle = x_i \right)$

Démo :

$\boxed{\langle x | e_k \rangle} = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i | e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overbrace{\langle e_i | e_k \rangle}^{\delta_{ik}} = \boxed{x_k}$

d) Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\boxed{\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tX \cdot Y} \quad !$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$${}^tX \cdot Y = \underbrace{(x_1 \ \dots \ x_n)}_{1 \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}_{1 \times 1}$$

e) Produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A|B\rangle = tr({}^tA \cdot B)$$

$\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\boxed{\langle A|B\rangle = tr({}^tA \cdot B) = \sum_{1\leq i,j \leq n} A_{ij} B_{ij} \quad \text{où } A=(A_{ij}) \text{ et } B=(B_{ij})}$$

Produit scalaire « naturel ».

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb'$$

$$\left\langle (A_{ij}) \middle| (B_{ij}) \right\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij} B_{ij} \overset{!}{=} tr({}^tA.B)$$

~~Démo ?~~

$$a\left({}^{t}A\cdot B\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}\, B_{ij}$$

? Démo ?

$$\mathrm{tr}\left({}^tA\cdot B\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}\, B_{ij}$$

$A=(A_{ij})\ ;\ B=(B_{ij})$

$$\mathrm{tr}\left({}^tA\cdot B\right) = \sum_{i=1}^{n} \left({}^tAB\right)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left({}^tA\right)_{ij} B_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} B_{ji}$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ji} B_{ji} = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij} B_{ij}$$

→ variables muettes

Exercices d'applications

Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall n \geqslant 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

2) $\forall f \in C([0,1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2$

3) Pour tout $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, avec $f > 0$, on a :

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

Scanned with CamScanner

Prop 5

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = ?$$

Prop 5

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle$$

Prop 5

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle$$

Attention à cette erreur

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i \rangle$$

C'est en général FAUX !!

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}.$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = ?$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = ?$$

Don't forget!!

Prop 5

Soient $x_1,\dots,x_p, y_1,\dots,y_p \in \mathbb{R}$.
Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{1\le i,j\le p} x_i y_j \langle e_i | e_j\rangle$$

17/95

Attention à cette erreur

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i\rangle$$

C'est en général FAUX !!

$x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i y_j$$

Non pas ! $\cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j$$

Non pas : $\cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Don't forget !!

2) Si $\mathcal{F}$ est orthonormale, on a:

S! i) $\langle x | y \rangle =$

ii) $\|x\| =$

2) Si F est orthonormale, on a:

S! i) $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$

ii) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Prop 7

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E.

$$\boxed{\forall x \in E,\ x=\sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Si } x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ alors } (\forall i,\ x_i=\langle x|e_i\rangle)}$$

Prop 7

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E.

$$\boxed{\forall x\in E,\ x=\sum_{i=1}^{n}\langle x|e_i\rangle e_i}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Si } x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i \text{ alors } (\forall i,\ x_i=\langle x|e_i\rangle)}$$

Prop 6

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E. On a :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Prop 7

Soient E un espace euclidien de dim n et F un sev de E. On a :

1) $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$

2) $F^{\perp\perp} = F$