On considère la suite de polynômes $(P_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'(X).$$

1) a) Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leqslant n$. On note a_n le coefficient de X^n dans $P_n(X)$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}a_n$. En déduire que $a_n = n+1$. Que dire alors du degré de $P_n(X)$?

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, que dire alors de la parité du polynôme $P_n(X)$?

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}'(X) = (n+2)P_n(X)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.

c) Déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\displaystyle\int_0^x P_n(t)\,dt$. Calculer ainsi $P_3(X)$ et $P_4(X)$.

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) - 2XP_{n+1}(X) + (1+X^2)P_n(X) = 0$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u_n = P_n(x)$, on a donc $u_0 = 1$ et $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et x.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \dfrac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$.

5) a) Montrer que le polynôme $P_n(X)$ admet n racines réelles (que l'on calculera).

b) Factoriser le polynôme $P_n(X)$.

c) Calculer la somme et le produit des racines de $P_n(X)$ (on distinguera les cas suivant la parité de n).