

## EXTRAIT

## DEUXIEME PROBLEME

Dans tout ce problème,  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

## Partie A

On considère l'équation différentielle :  $y' + 2xy = 1$ .

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

On désigne désormais par  $f$  l'une de ses solutions sur  $\mathbb{R}$ , **que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.**

2. (a) Prouver que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Quelle est la valeur de  $f'(0)$  ?

3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$ .

4. (a) Montrer que  $f$  admet en 0 un développement limité à tout ordre  $p$  ( $p$  entier naturel). Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k + o(x^p).$$

(b) A l'aide du résultat de la question 3, montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$ .

(c) Obtenir également l'expression des termes  $a_{2k}$  à l'aide de  $f(0)$  ( $k$  entier naturel).

## Partie B

On considère la fonction de la variable réelle  $D : x \mapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ .

1. Justifier le fait que  $D$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et vérifier que  $D$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y' + 2xy = 1$ .

2. Étudier la parité de  $D$ .

3. Prouver que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$ .

4. (a) Prouver que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$ .

(b) Soit la fonction  $h : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$ . Montrer que  $h$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ . En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt,$$

et qu'au voisinage de  $+\infty$  :  $\int_1^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ . En déduire enfin un équivalent de  $D(x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

5. (a) Prouver que  $D$  admet un maximum, atteint en un point  $b$  de  $\mathbb{R}_+^\times$ .  
(b) Montrer que ce maximum est égal à  $\frac{1}{2b}$ .  
(c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

### Partie C

1. Déterminer à l'aide de  $D$  l'ensemble des fonctions solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y' + 2xy = 1$ .
2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

# FIN EXTRAIT

