PROBLEME

Extrait de Petites Mines 2001

Les parties **B** *et* **C** *sont liées, mais la partie* **A** *est indépendante du reste du problème.*

Partie A :

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 .$$

A.1. Vérifier la relation

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t) \ .$$

A.2. En déduire que $\big(E(t)\big)^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

A.3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

A.4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

A.5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

Attention ! E n'est pas linéaire.

A.6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

B.1. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u de F, et un vecteur directeur v de G.

B.2. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\ u\ ,\ v\ )$.

B.3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

B.4. Expliciter D^n pour tout entier naturel n. Démontrer la relation $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Partie C :

On reprend les notations de la partie **B**.

On admet que, pour tout réel t, on a

$$e^t = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right) .$$

C.1. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

C.2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.

Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$.

C.3. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E(t) = e^{2t}\,Q + e^t\,R$$

et expliciter Q et R.

C.4. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR, RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (*on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question* **B.1.**) ?

C.5. En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t) .$$

Que dire de $\big(E(t)\big)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $\big(E(t)\big)^{-1}$?

L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?

Fin & bon courage