

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mercredi 19 mai 2004 de 08h00 à 12h00

EXTRAIT

Premier problème

I. Résolution d'équations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z \operatorname{th} t = 0$, où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles.

Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th} t$.

Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

III. Etude d'intégrales et de suites

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

10. Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).

11. Calculer $I_2(x)$.

- 12.

- a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (on pourra remarquer que $\frac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$).

- b) En déduire I_3 et I_4 .

13. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :

- a) impaire.
b) continue sur $\mathbb{R}$.
c) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14. Calculer I_k' , I_k'' et I_k''' .

15. Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.

16. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.

17. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = I_k(n).$$

a) Démontrer que cette suite est monotone.

b) Démontrer que, pour tout réel t , $\frac{1}{\operatorname{ch} t} \leq 2e^{-t}$; en déduire que la suite converge.

18. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$, notée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

a) Démontrer l'existence de J_k .

b) Calculer J_1 et J_2 .

c) Calculer J_k .

FIN

