

Topologie 3

Exercice 1 :

E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme infinie N .

D et L sont les endomorphismes de E définis pour toute suite $u = (u_n)_n$ par :

$$(D(u))_n = u_{n+1} \text{ et } (L(u))_n = u_{n+1} - u_n$$

Montrer que D et L sont continues sur E .

Exercice 2 :

E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme infinie N_1 .

F l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente.

On munit F de la norme N_2 définie par : $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Pour $a \in E$ et $u \in F$ on note : $f(a, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$

- 1) Justifier que N_2 est effectivement une norme sur F , puis que $f(a, u)$ existe.
- 2) Fixons $u \in F$. Montrer que l'application $a \mapsto f(a, u)$ est continue sur E .
- 3) Fixons maintenant $a \in E$. Montrer que l'application $u \mapsto f(a, u)$ est continue sur F .

Exercice 3 :

$E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0, 1], \mathbb{R})$

On munit E des normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(f) = \|f\|_{\infty} \text{ et } N_2(f) = \|f\|_2$$

et on munit F de la norme N_3 définie par :

$$N_3(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

Considérons l'application $T : E \rightarrow F$, $f \mapsto T(f)$ où $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

- 1) Montrer que T est une application linéaire continue pour N_1 .
- 2) Soit $g \in E$ fixé. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme linéaire continue sur E pour la norme N_2 .

Exercice 4 :

Montrer que :

- 1) L'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
Indice : Montrer que c'est une partie étoilée
- 2) $SO_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $M_2(\mathbb{R})$.
- 3) La sphère unité d'un evn de dimension finie $n \succeq 2$ est connexe par arcs.
- 4) L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Topologie 3

Ex 1 : 1) D linéaire.

$$\forall u \in E, \|D(u)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(D(u))_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1}| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \|u\|_\infty$$

D'où D continue sur E

2) L linéaire.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |(L(u))_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1}| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \leq \|u\|_\infty + \|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty$$

$$\text{D'où } \sup_{n \in \mathbb{N}} |(L(u))_n| = \|L(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$

$\Rightarrow L$ continue sur E

Ex 2 :

1) i) N_2 norme : OK

ii) $f(a, u)$ existe, ça veut dire que la série $\sum a_n u_n$ converge.

Et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n u_n| \leq \|a\|_\infty \cdot |u_n|)$

or $\sum |u_n|$ converge alors $\sum |a_n u_n| < \infty$, donc $\sum a_n u_n < \infty$

2) Notons $\phi(a) = f(a, u)$ pour tout $a \in E$.

On a : $(\forall a \in E, \phi(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n)$, ϕ est clairement forme linéaire sur E .

D'autre part, $(\forall a \in E, |\phi(a)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|a_n|}_{\leq N_1(a)} \cdot |u_n| \leq N_1(a) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \right)$

d'où ϕ est continue sur E

3) Posons $\psi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$, pour tout $u \in F$, $\psi \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$ (clair)

Et on a : $\forall u \in F, |\psi(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|a_n|}_{\leq N_1(a)} \cdot |u_n| \leq N_1(a) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}_{= N_2(u)}$

d'où ψ est continue sur F

Ex 3 : 1) i) $T \in \mathcal{L}(E, F)$, en effet :

Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$

(à vérifier : $(\forall x \in [0, 1], (T(\lambda f + g))(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x))$

Et on a : $T(\lambda f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x (\lambda f(t) + g(t)) dt = \underbrace{\lambda \int_0^x f(t) dt}_{T(f)(x)} + \underbrace{\int_0^x g(t) dt}_{T(g)(x)}$

(1)

ii) T est continue sur E , en effet.
 Soit $f \in E$, on a : $N_3(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \| (T(f))' \|_\infty = \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |T(f)(x)|$$

$$\forall x \in [0,1], \text{ on a } |T(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\|_\infty dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$$

$$\text{Donc } \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \text{ et donc : } (\forall f \in E, N_3(T(f)) \leq 2\|f\|_\infty)$$

T étant linéaire, elle est donc continue sur E

2) Notons $\phi(f) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$, pour tout $f \in E$.

ϕ est clairement forme linéaire sur E .

Pour tout $f \in E$, on a :

$$|\phi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) g(t) dt \right| \leq \underbrace{\sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}}_{N_2(f)} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^1 g^2(t) dt}}_{N_2(g)} \quad \text{Ineq Cauchy-Schwarz}$$

$$\Rightarrow (\forall f \in E, |\phi(f)| \leq N_2(g) \cdot N_2(f))$$

Donc ϕ est continue sur E pour la norme N_2 .

(ex 4) 1) Notons A l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$,
 Montrons que A est étoilé.

La matrice nulle $0 \in A$.

Pour tout $N \in A$, on a $[0, N] \subset A$, en effet :

Soit $t \in [0,1]$, $t \cdot 0 + (1-t)N = (1-t)N$ qui est une matrice nilpotente. $[((1-t)N)^k = (1-t)^k N^k \dots]$

Ainsi, A est étoilé, donc connexe par arcs.

$$2) SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} = \{ \phi(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R} \} = \phi(\mathbb{R})$$

$$\text{où } \phi : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R}) ; \phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ϕ est bien continue sur $\mathbb{R}$, car ses composantes le sont.

et $\mathbb{R}$ est connexe par arcs, alors $\phi(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

3) Notons $S = \{x \in E / \|x\| \leq 2\}$, où E est un d.v. lin. $n \geq 2$.

Soient a et $b \in S$.

Le chemin $t \mapsto ta + (1-t)b$ joint a et b et est continu. Mais il n'est pas contenu dans la sphère. Alors on passera à diviser par $\|ta + (1-t)b\|$. Spécialement ça doit être non nul pour tout $t \in [0, 1]$.

$$\text{On a } ta + (1-t)b = 0 \Rightarrow ta = -(1-t)b$$

$$\Rightarrow \underbrace{t}_{=1} \|a\| = (1-t) \underbrace{\|b\|}_{=1}$$

$$\Rightarrow t = 1-t; \text{ c'est-à-dire } t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0$$

Ainsi : $\left(\text{Si } a \neq -b \text{ Alors } (\forall t \in [0, 1], ta + (1-t)b \neq 0) \right)$

Cas 1 : (Si $a \neq -b$)

L'application $\phi: [0, 1] \rightarrow E$ et $t \mapsto \frac{1}{\|ta + (1-t)b\|} \cdot (ta + (1-t)b)$

est bien un chemin continu, inscrit dans S et joignant a et b ($\phi(0) = b$; $\phi(1) = a$)

Cas 2 : (Si $a = -b$)

On prend un point c de S différent de a et $(-a) = b$.

Qua $c \neq -a \xRightarrow{\text{Cas 1}} \left(\begin{array}{l} c \text{ et } a \text{ sont joignables par un} \\ \text{chemin continu inscrit dans } S \end{array} \right)$

et on a $c \neq a \Rightarrow c \neq -b$ ($a = -b$)

$\xRightarrow{\text{Cas 1}} \left(\begin{array}{l} c \text{ et } b \text{ sont joignables par un chemin} \\ \text{continu inscrit dans } S \end{array} \right)$

2) ou $\left(\begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ sont joignables par un chemin} \\ \text{continu inscrit dans } S \end{array} \right)$

4) Notons Δ_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.

On veut Δ_n est connexe par arcs :

Piste 1 :

Soit $A \in \Delta_n$, A est joignable à $I_n \in \Delta_n$ par le chemin
continue : $\phi : [0, 1] \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ qui est inscrit
 $t \mapsto tA + (1-t)I_n$
dans Δ_n (car $tA + (1-t)I_n$ est diagonalisable)
Donc Δ_n est connexe par arcs $\Rightarrow$

Piste 2 : plus simple :

$\forall A \in \Delta_n, [A, 0] \subset \Delta_n$ (car $\forall t \in [0, 1], tA + (1-t)0 = tA \in \Delta_n$)
Donc Δ_n est étoilé en 0, donc Δ_n est connexe par arcs

NB : Δ_n est aussi étoilé en I_n

Fin