

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$$

Rappel : f est strictement croissante ça veut dire que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$$

Sol Montrons par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n)$$

Initialisation : Pour $n=0$.

On a $f(0) \geq 0$ car $f(0) \in \mathbb{N}$, puisque f application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp que $f(n) \geq n$.

Montrons que $f(n+1) \geq n+1$.

On a $f(n+1) > f(n)$ car f strictement Croissante et que $n+1 > n$.

Or $f(n) \geq n$, alors $f(n+1) > n$

et puisque $f(n+1)$ et n deux entiers naturels

$$\text{D'où } \boxed{f(n+1) \geq n+1} \quad \square$$

fin Ex3

Exercice 4 :

- 1) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
- 2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_{2^n} \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$$

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

$$\text{Donc } \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \square$$

**** 2) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.**

Initialisation : Pour $n=1$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A. que :

$$\left(\prod_{k=1}^{2^1} x_k \right)^{\frac{1}{2^1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^1} x_k}{2}$$

$$\text{On a } \left(\prod_{k=1}^{2^1} x_k \right)^{\frac{1}{2^1}} = (x_1 \times x_2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\text{et } \frac{\sum_{k=1}^{2^1} x_k}{2^1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\text{Et on a } \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ d'après la question 1)}$$

$$\text{Donc } \left(\prod_{k=1}^{2^1} x_k \right)^{\frac{1}{2^1}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^1} x_k}{2}$$

**** Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que la propriété est vraie pour n .
Et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit alors $x_1, \dots, x_{2^{n+1}} \in \mathbb{R}^+$.

Montrons que :

$$\left(\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k} \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k}{2^{n+1}}$$

On a :

$$\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k} = \left(\frac{2^n}{\prod_{k=1}^{2^n} x_k} \right) \times \left(\frac{2^{n+2}}{\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k} \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \left(\frac{2^n}{\prod_{k=1}^{2^n} x_k} \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} \times \left(\frac{2^{n+2}}{\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k} \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$\left(\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k} \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{\left(\frac{2^n}{\prod_{k=1}^{2^n} x_k} \right)^{\frac{1}{2^n}}} \times \sqrt{\left(\frac{2^{n+2}}{\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k} \right)^{\frac{1}{2^n}}}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\left(\frac{2^n}{\prod_{k=1}^{2^n} x_k} \right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(\frac{2^{n+2}}{\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+2}} x_k} \right)^{\frac{1}{2^n}}}_{\substack{\text{ici, il y a } 2^n \\ \text{termes}}} \leq \frac{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k}{2^n}$$

D'au :

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k \right)^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{2^n}}} \times \sqrt{\left(\prod_{k=2^n+1}^{n+1} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{2^n}} \times \sqrt{\frac{\sum_{k=2^n+1}^{n+1} x_k}{2^n}}$$

$$\leq \frac{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{2^n} + \frac{\sum_{k=2^n+1}^{n+1} x_k}{2^n}}{2}$$

→ d'après la question 1°/

$$= \frac{\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=2^n+1}^{n+1} x_k}{2 \times 2^n}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_k}{2^{n+1}} \quad \text{fin}$$

Réurrence forte :

Exercice 7 :

Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + \dots + u_0 \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}$

Initialisation :

Pour $n=1$ (OK)

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_k = 2^{k-1}$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

Et montrons que $u_{n+1} = 2^n$.

$$\text{On a } u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \quad (\text{car } (n+1) \geq 2)$$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^n u_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$= 1 + 2^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n 2^k$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$= 1 - (1-2^{n+1})$$

$$= 2^{n+1}$$

fin exercice 7

Sommes doubles :

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$
- 2) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$
- 3) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)$
- 4) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$
- 5) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$
- 6) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)^2$
- 7) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$
- 8) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$
- 9) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} C_n^j C_i^j$
- 10) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

Rapports :

$$1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)$$

$$2) \sum_{k=p}^n k \quad \text{ou } p \leq n \quad \frac{p+n}{2} \times (n-p+1)$$

$$1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \stackrel{S!}{=} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i+1}^n ij \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \sum_{j=i+1}^n j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{i+1+n}{2} \cdot (n-i) \right)$$

$$= \dots ; \text{ via } \left\{ \begin{array}{l} \sum i = \dots \\ \sum i^2 = \dots \\ \sum i^3 = \dots \end{array} \right.$$

$$3) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(i \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= n \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot n$$

$$= n^2(n+1)$$

Rappel: $\sum_{i=p}^n C = C \times (n-p+1)$
 $\hookrightarrow$ où $p \leq n$

$$\begin{aligned} 4) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i+1}^n (i+j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i+1}^n i + \sum_{j=i+1}^n j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(i \cdot (n-i) + \frac{i+1+n}{2} \times (n-i) \right) \end{aligned}$$

$$= \dots ; \text{ via } \left| \begin{array}{l} \sum i = \dots \\ \sum i^2 = \dots \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 7) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \min(i, j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\min(i, j)}_{=j} + \sum_{j=i}^n \underbrace{\min(i, j)}_{=i} \right) \end{aligned}$$

Rappel: $\min(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=i}^n i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=2}^{i-1} j + \sum_{j=i}^n i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i \cdot (i-1)}{2} + i \times (n-i+1) \right)$$

$$= \dots ; \text{ via Euler } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n i = \dots \\ \sum_{i=1}^n i^2 = \dots \\ \sum_{i=1}^n C = \dots \end{array} \right.$$

9) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} C_n^i C_n^j$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n C_n^i C_n^j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n C_n^i \left(\sum_{j=i}^n C_n^j \right)$$

$\forall j > i, C_n^j = 0$

$$= \sum_{i=1}^n C_n^i \times C_n^{\underbrace{i}_{=1}}$$

$$= \sum_{i=1}^n C_n^i$$

$$= \sum_{i=0}^n C_n^i - 1$$

$$= 2^n - 1 \quad \square$$

$$10) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n \frac{i}{j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \right)$$

→ somme non classique
→ C'est l'impassé...

Commençons par $\sum_j$:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \cdot \sum_{i=1}^{j-1} i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j-1)}{2}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{j-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right)$$

= ... 