Correction proposée par :
EL Amdaoui Mustapha
Email : elamdaoui@gmail.com
Site web : www.elamdaoui.com

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - L'application $t \longmapsto e^{tx-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
   - En outre $e^{tx-t^2} \underset{|t|\to+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable.

2. Soit $h:\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{tx-t^2}$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application h admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}$, donnée par $\forall(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = t^n e^{tx-t^2}$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde
   - Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [a,b]$, on a $tx \leqslant \gamma\,|t|$, avec $\gamma = \max(|a|\,,|b|)$. Posons alors $\varphi_n:\ t \in \mathbb{R} \longmapsto |t|^n\, e^{\gamma|t|-t^2}$. Une telle fonction est positive, continue et intégrable telle que :

   $$\forall(x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi_n(t)$$

   Par le théorème de dérivation sous-signe intégrale f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\qquad f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2}\mathrm{d}t$$

3. D'après l'expression de la dérivée f', on a $f'(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$. Mais $t \longmapsto te^{-t^2}$ est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto e^{tx-t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\lim_{|t|\to+\infty} te^{tx-t^2} = 0$. Alors par intégration par parties

   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t \\ & = & \left[te^{tx-t^2}\right]_{\infty}^{\infty} - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t(x-2t)e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t \\ & = & -x\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t \\ & = & -xf'(x) + 2f''(x) \end{array}$$

5. La fonction $\varphi:\ x \longmapsto xf(x) - 2f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f(x) + xf'(x) - 2f''(x) = 0$, donc il s'agit d'une fonction constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Avec $\varphi(0) = -2f'(0) = 0$, alors $\varphi = 0$.

6. D'après la question précédente f est solution de l'équation différentielle linéaire $y' - \dfrac{x}{2}y = 0$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha e^{\frac{x^2}{4}}$. La condition $\alpha = f(0)$ donne $\alpha = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   - La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, car pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \dfrac{n}{n+1} e^{-x} \leqslant 1$ et $\dfrac{e^{-nx}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc elle converge. Ainsi la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
   - En outre pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geqslant 1$, on a

   $$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{-kx} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

   avec $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application u_n est continue sur $\mathbb{R}$. De plus la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, donc la fonction somme g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3.
   - Pour tout $n \geqslant 1$, l'application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n'(x) = (-1)^n e^{-nx}$.
   - la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in [a, b]$ et $n \geqslant 1$, on a

   $$|u_n'(x)| = e^{-nx} \leqslant e^{-na}$$

   La série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-na}$, de raison $e^{-a} \in]0, 1[$, converge, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, donc elle l'est uniformément

   Par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-e^{-x}\right)^n = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

4. D'après la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \alpha$$

   Par passage à la limite lorsque x tend vers 0^+ et par continuité de g et de $\ln$, on obtient $g(0) = \ln(2) + \alpha$. Avec la donnée $g(0) = \ln(2)$, on tire

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

Problème

1ère partie
Un isomorphisme canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur son dual $(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^*$

1.1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. L'application T_A est bien définie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit M, $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_A(\lambda M + N) &= \mathrm{Tr}(A(\lambda M + N)) \\ &= \mathrm{Tr}(\lambda AM + AN) \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(AM) + \mathrm{Tr}(AN) = \lambda \mathrm{T}_A(M) + \mathrm{T}_A(N) \end{aligned}$$

Comme T_A est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc T_A est bien une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2. Soit $\Phi : \ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mathrm{T}_A \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^*$.

1.2.1. Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda A + B)(M) &= \mathrm{T}_{\lambda A+B}(M)\\ &= \mathrm{Tr}((\lambda A + B)M) = \mathrm{Tr}(\lambda AM + BM)\\ &= \lambda \mathrm{Tr}(AM) + \mathrm{Tr}(BM) = \lambda \mathrm{T}_A(M) + \mathrm{T}_B(M)\\ &= (\lambda\varphi(A) + \varphi(B))(M)\end{aligned}$$

Ceci vrai quelque soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$.

1.2.2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \ker(\Phi)$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le calcul de $AE_{j,i}$ donne

$$AE_{j,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}E_{k\ell}E_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}E_{k,i}$$

On tire donc $\mathrm{T}_A(E_{j,i}) = \mathrm{Tr}(AE_{j,i}) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}E_{k,i}\right) = a_{i,j}$, puis $a_{i,j} = \Phi(A)(E_{j,i}) = 0$. La matrice A est donc nulle et $\ker(\Phi) = \{0\}$.

1.2.3. Vu $\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \dim(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^*$ et Φ endomorphisme injectif, alors il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels et, par suite, pour toute forme linéaire $\psi \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^*$ il existe une unique matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\psi = \Phi(A) = \mathrm{T}_A$

1.3. $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe une forme linéaire non nulle ψ telle que $\mathcal{H} = \ker(\psi)$. La question précédente justifie l'existence d'une matrice A telle que $\psi = \mathrm{T}_A$ et comme ψ est non nulle, alors $A \neq 0$.

1.4. Par hypothèse $A \neq 0$, alors $\mathrm{T}_A \neq 0$, en conséquence il existe $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{T}_A(C) = 1$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \ker(\mathrm{T}_A) \oplus \mathrm{Vect}(C)$. Pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $M_A \in \ker(\mathrm{T}_A)$ tels que $M = M_A + \alpha C$ et puisque $\ker(\mathrm{T}_A) \subset \ker(\mathrm{T}_B)$, alors $\mathrm{T}_B(M) = \alpha\mathrm{T}_B(C)$. Posons $\lambda = \mathrm{T}_B(C)$, alors il vient $\mathrm{T}_B(M) = \lambda\alpha = \lambda\mathrm{T}_A(M) = \mathrm{T}_{\lambda A}(M)$, soit $\Phi(B) = \Phi(\lambda A)$, par injectivité de Φ, on a bien $B = \lambda A$

1.5. Posons $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Par définition du produit matriciel, on a $MN = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $NM = \left(\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et par définition de la trace $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i}$ et $\mathrm{Tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,i}$. Ceci prouve que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

1.6. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{T}_A(M) = \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}\left(PBP^{-1}M\right) = \mathrm{Tr}\left(BP^{-1}MP\right) = \mathrm{T}_B\left(P^{-1}MP\right)$$

On conclut donc que $M \in \mathcal{H}_A$ si, et seulement, si $P^{-1}MP \in \mathcal{H}_B$, ainsi $\mathcal{H}_A = P\mathcal{H}_BP^{-1}$

2$^{\text{ème}}$ partie

Étude du noyau $\ker(\mathrm{T}_A)$ pour $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle.

2.1. $\mathcal{H}_A$ est le noyau de la forme linéaire non nulle T_A, donc il s'agit bien d'un hyperplan et sa dimension est évidemment 3.

2.2. On suppose dans cette question que A est semblable à $R = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$.

2.2.1. On a $\mathrm{Tr}(R) = \lambda + \mu = \mathrm{Tr}(A) = 0$, donc $\mu = -\lambda$. En outre si $\mu = 0$, alors $R = 0$, puis $A = 0$. Absurde, donc $\mu \neq 0$.

2.2.2. Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, on a $RM = \begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ -\lambda c & -\lambda d\end{pmatrix}$ et $\mathrm{T}_R(M) = \lambda(a-d)$. On conclut donc que $M \in \mathcal{H}_R$ si, et seulement, si $\lambda(a-d) = 0$ si, et seulement, si $a = d$. Ainsi $\mathcal{H}_R = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}$

2.2.3. Les deux matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{H}_R$ dont le produit CD vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{H}_R$.

2.2.4. Les deux matrices PCP^{-1} et PDP^{-1} sont dans $\mathcal{H}_A$ dont le produit $PCDP^{-1} \notin \mathcal{H}_A$.

2.3. On suppose que A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$

2.3.1. Par hypothèse $\mathrm{Tr}(A) = 0$, donc $\chi_A = X^2 + \det(A)$. Si $\det(A) \neq 0$, alors χ_A est scindé à racines simples et A sera diagonalisable, ce qui est absurde, donc $\det(A) = 0$, puis $\chi_A = X^2$, soit A est nilpotente non nulle, donc elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte non nulle. Ainsi il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tels que $A = PRP^{-1}$, avec $R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, on a $RM = \begin{pmatrix} \alpha c & \alpha d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{T}_R(M) = \alpha c$. On conclut donc que $M \in \mathcal{H}_R$ si, et seulement, si $\alpha c = 0$ si, et seulement, si $c = 0$. Ainsi $\mathcal{H}_R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ (a, b, d) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

2.3.3.
- D'après la question précédente, $\mathcal{H}_R$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2, qui est une $\mathbb{C}$-algèbre.
- L'application $\phi : M \longmapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme d'algèbre de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathcal{H}_A = \phi(\mathcal{H}_R)$, donc $\mathcal{H}_A$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, donc elle est stable par le produit matriciel

3ème partie
Étude des hyperplans de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ stables par le produit matriciel

3.1.

3.1.1. Si $\psi(\mathrm{I}_n) = 0$, alors $\mathrm{I}_n \in \ker(\psi) = \mathcal{H}$.

3.1.2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 \in \mathcal{H}$.

(i) On a $\psi(M - \lambda I_n) = \psi(M) - \lambda\psi(I_n) = 0$, donc $M - \lambda\mathrm{I}_n = M_H \in \mathcal{H}$. Par stabilité de $\mathcal{H}$ par le produit matriciel, il vient $(M - \lambda\mathrm{I}_n)^2 \in \mathcal{H}$.

(ii) Les deux matrices M et $\lambda\mathrm{I}_n$ commutent, alors par la formule de binôme de Newton $(M - \lambda\mathrm{I}_n)^2 = M^2 - 2\lambda M + \lambda^2\mathrm{I}_n$, soit, par stabilité de $\lambda^2\mathrm{I}_n - 2\lambda M = (M - \lambda\mathrm{I}_n)^2 - M^2 \in \mathcal{H}$

(iii) D'une part $\psi\left(\lambda^2\mathrm{I}_n - 2\lambda M\right) = \lambda^2\psi(\mathrm{I}_n) - 2\lambda\psi(M) = -\lambda^2\psi(\mathrm{I}_n)$ et d'autre part $\lambda^2\mathrm{I}_n - 2\lambda M \in \mathcal{H} = \ker(\psi)$, donc $-\lambda^2\psi(\mathrm{I}_n) = 0$, puis $\lambda = 0$, car $\psi(\mathrm{I}_n) \neq 0$. Enfin $M = M_H \in \mathcal{H}$

3.1.3. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. On a $E_{i,j}^2 = \delta_{i,j}E_{i,j} = 0 \in H$, alors par la question précédente on tire $E_{i,j} \in \mathcal{H}$.

3.1.4. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on choisit $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. On a $E_{i,i} = E_{i,j}.E_{j,i}$ et comme $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ sont dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est stable par le produit matriciel, alors $E_{i,i} \in \mathcal{H}$.

3.1.5. $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel, alors par stabilité par combinaison $\mathrm{I}_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} \in \mathcal{H}$. Absurde. On conclut que l'hypothèse $\mathrm{I}_n \in \mathcal{H}$

3.2.
- Soit $N \in \ker(\mathrm{T}_A)$, alors $N \in \mathcal{H}$ et par stabilité de $\mathcal{H}$ par le produit matriciel on obtient $MN \in \mathcal{H}$, soit $\mathrm{Tr}(AMN) = 0$, c'est-à-dire $N \in \ker(\mathrm{T}_{AM})$. Ainsi l'inclusion $\ker(\mathrm{T}_A) \subset \ker(\mathrm{T}_{AM})$.
- Comme $A \neq 0$, le résultat de la question **1.4.** s'applique, donc il existe un nombre λ_M tel que $AM = \lambda_M A$ ou encore $A(M - \lambda_M\mathrm{I}_n) = 0$.

3.3. Soit $M \in \mathcal{H}$, on pose $N = M - \lambda_M\mathrm{I}_n$, avec λ_M le nombre de la question précédente. On a bien $AN = 0$, soit $N \in \mathcal{F}$ et $M = N + \lambda_M\mathrm{I}_n \in \mathcal{F} + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Ainsi $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$.

3.4.
- Montrons que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$
  - $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$;
  - $\mathcal{F} \neq \emptyset$, car il contient la matrice nulle ;
  - Soit $M, N \in \mathcal{F}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = 0$, donc $\alpha M + N \in \mathcal{F}$.

  Ceci prouve que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

- Posons
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \ker(\varphi_A)\right) \\ N & \longmapsto & \varphi_N \end{array} \right.$$
avec φ_N est défini par $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \varphi_N(X) = NX$.
  - **φ est bien définie.**
  Si $N \in \mathcal{F}$, l'application φ_N est bien un endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En outre pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $ANX = 0$, donc $\varphi_N(X) \in \ker(\varphi_A)$, donc φ_N est à valeurs dans $\ker(\varphi_A)$.
  - **φ est linéaire.**
  Soit $M, N \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a
  $$\varphi(\lambda M + N)(X) = (\lambda M + N)X = \lambda MX + NX = (\lambda\varphi(M) + \varphi(N))(X)$$
  Ceci vrai pour tout $X \in\in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc $\varphi(\lambda M + N) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$
  - **φ est surjective.**
  Soit $\psi \in \mathcal{L}\left(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \ker(\varphi_A)\right)$ et notons $\mathcal{B} = (\mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Posons $Y_i = \psi(\varepsilon_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et soit N la matrice de vecteurs colonnes $Y_1, \cdots, Y_n$. On a bien $\varphi_N = \psi$ car il s'agit de deux applications linéaires qui coïncident sur une base et AN est la matrice dont les colonnes sont $AY_1, \cdots, AY_n$, donc $AN = 0$, soit $N \in \mathcal{F}$
  - **φ est injective.**
  Soit $N \in \mathcal{F}$ telle que $\varphi_N = 0$, alors toutes les colonnes de N sont nulles, donc $N = 0$

  Bref φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{L}\left(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \ker(\varphi_A)\right)$.

3.5.
- La question précédente permet l'égalité
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}\left(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \ker(\varphi_A)\right) = n \dim_{\mathbb{C}} \ker(\varphi_A) = n\left(n - \mathrm{rg}(\varphi_A)\right)$$
Or A est la matrice de φ_A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{rg}(\varphi_A) = \mathrm{rg}(A)$.
- L'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$ donne $\dim \mathcal{H} \leqslant \dim(\mathcal{F} + \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)) \leqslant \dim \mathcal{F} + 1$. Ainsi on obtient l'inégalité
$$n^2 - 1 \leqslant n(n - \mathrm{rgA}) + 1 \Rightarrow n.\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$$

3.6. A étant non nulle, donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$, puis $2 \leqslant n \leqslant n.\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$. On gagne donc $n = 2$ et même $\mathrm{rg}(A) = 1$.

3.7. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ stable par le produit matriciel. D'après la question **1.3** il existe $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathcal{H} = \ker(T_A) = \mathcal{H}_A$. En outre d'après **3.1** la matrice $I_n \in \mathcal{H}$, soit $\mathrm{Tr}(A) = 0$. L'étude faite dans la partie 2 montre qu'un tel hyperplan $\mathcal{H}_A = \ker(T_A)$, avec A non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ de trace nulle, est stable par produit matriciel. Bref les hyperplans de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ stables par le produit matriciel sont de la forme $\ker(T_A)$ avec $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle de trace nulle.