Pont vers Spé : Réduction des Matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$.
Notons pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$$

Définitions :

i) χ_A s'appelle le polynôme caractérsitique de A.

ii) Les racines du polynôme χ_A s'appellent les valeurs propres de A.

iii) $S_p(A)$ s'appelle le spectre de A, c'est l'ensemble des valeurs propres de A.

iv) Si $\lambda \in S_p(A)$, on note $E_\lambda(A) = ker(A - \lambda I_n)$. C'est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

1) Montrer que :
   i) $\lambda \in S_p(A) \;\Leftrightarrow\; (\exists X_0 \in M_{n1}(\mathbb{K})|\{0\},\; AX_0 = \lambda X_0)$
   ii) Si A et B sont deux matrices semblables, alors :
      a) $\chi_A = \chi_B$
      b) $S_p(A) = S_p(B)$
   iii) Ecrire $dim(E_\lambda(A))$ en fonction de n et $rg(A - \lambda I_n)$.

2) On pose dans cette question :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer $\chi_A(\lambda)$, et donner-le sous forme factorisée.
   Déterminer les valeurs propres de A.
   b) Déterminer une base pour chaque sous-espace propre de A.
   Notons S la famille formée par ces trois bases, et B_c la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   c) Vérifier que S est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Notons P la matrice de passage de B_c à S.
   d) Calculer P^{-1}.
   e) Ecrire A en fonction de P et D ; où D est une matrice diagonale à préciser.
   f) En déduire A^n sous forme de tableau matriciel, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

g) Considérons les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = -1 \ et\ \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} & = & x_n + y_n - z_n \end{array} \right.$$

Déduire de ce qui précède le terme général de chacune de ces suites.

3) Répondre à la question 2)a) dans chacun des cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$