Une Solution

1) a) Par double inclusion

$\subset$: Soit $(a) \in T_1(\mathbb{R})$. M. que $a \geq 0$.
Pour $n = 2$, $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tq que $(a) = (b)^2$
$\Rightarrow a = b^2 \geq 0$

$\supset$: Soit $a \in [0, +\infty[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(a) = (\sqrt[n]{a})^n$
$\Rightarrow (a) \in T_1(\mathbb{R})$

b) Les $\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$; avec $0 \leq k \leq n-1$

c) $T_1(\mathbb{C}) = M_1(\mathbb{C})$ (c-à-d $\mathbb{C}$) En effet : "$\subset$" évidente

"$\supset$" :

Soit $(a) \in M_1(\mathbb{C})$

$\longrightarrow$ Si $a \neq 0$: Posons $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(a) = (b)^n$ avec $b = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$.
et donc $(a) \in T_1(\mathbb{C})$

$\longrightarrow$ Si $a = 0$:
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(0) = (0)^n$
et donc $(0) \in T_1(\mathbb{C})$

2) a) Soit $A \in T_p(\mathbb{K})$. M. que $\det(A) \in T_1(\mathbb{K})$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. M qu'il existe $b \in \mathbb{K}$ tel que $\det(A) = b^k$
$A \in T_p(\mathbb{K}) \Rightarrow \exists B \in M_p(\mathbb{K}) \,/\, A = B^n$
$\Rightarrow \det(A) = (\det(B))^n$ $b = \det(B)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\det(A) \notin [0, +\infty[= T_1(\mathbb{R}) \Rightarrow A \notin T_2(\mathbb{R})$

3) a) Supposons l'existence d'une telle matrice B.

On a : $A = B^2 \iff \begin{cases} a^2+bc=-1 & (\alpha) \\ d^2+bc=-2 & (\beta) \\ b(a+d)=0 & (\gamma) \\ c(a+d)=0 & (\omega) \end{cases}$

$(\gamma) \Rightarrow (b=0$ ou $a=-d)$

Cas 1 : Si $b=0$:

$(\alpha) \Rightarrow a^2=-1$, ce qui est impossible

Cas 2 : Si $a=-d$:

Alors $a^2=d^2$.

(α) et $(\beta) \Longrightarrow -1=-2$, ce qui est impossible

C/c : Il n'existe aucune matrice B t.q. $A=B^2$

b) Pour $p=2$. On peut avoir $\det(A)\in T_1(\mathbb{R})$ mais $A \notin T_2(\mathbb{R})$

Pour $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, on a $\det(A)=2 \in T_1(\mathbb{R})$ mais $A\notin T_2(\mathbb{R})$

Car pour $n=2$, $\nexists B\in M_2(\mathbb{R})$ t.q. $A=B^2$

4) a) $\chi_A=(X-1)(X-2)^2$ scindé dans $\mathbb{R}$. thm rg

$\dim(E_1(A))=1$ (val propre simple)

reste à vérifier que $\dim(E_2(A))=2$; càd $rg(A-2I)=1$

On a $rg(A-2I)=rg\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}=1$; les trois colonnes sont proportionnelles.

$\Rightarrow A$ diagonalisable

b) On a $A=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^{-1}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A=\left(P\cdot\begin{pmatrix}1 & & \\ & \sqrt[n]{2} & \\ & & \sqrt[n]{2}\end{pmatrix}P^{-1}\right)^n=B^n$, où $B=P\cdot\begin{pmatrix}1 & & \\ & \sqrt[n]{2} & \\ & & \sqrt[n]{2}\end{pmatrix}P^{-1}$

$\Longrightarrow A$ TP$\mathbb{R}$.

C)

N.B (Calcul interdite → 2018)

Pour $n = 2$:

$B = P.\mathrm{diag}(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}).P^{-1} = \left(\qquad \right)$

Pour $n = 3$:

$B = P.\mathrm{diag}(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}).P^{-1} = \left(\qquad \right)$

5) a) $A = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ -\sin(\pi) & \cos\pi \end{pmatrix}$; matrice de la rotation d'angle π

b) Notons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

$\forall n \in \mathbb{N}, (R_\theta)^n = R_{n\theta}$.

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, A = \left(R_{\frac{\pi}{n}}\right)^n \right)$; donc A est TPR

6) a) $\chi_N(x) = x^p$.

Cayley-Hamilton $\Rightarrow N^p = 0$

b) Supposons que N est TPK.

Pour $n = p$, il existe B tq $N = B^p$

$\Rightarrow B^{p^2} = N^p = 0$

Ainsi B est nilpotente, alors d'après 6/a/, on a $\underbrace{B^p}_{=N} = 0$

$\Rightarrow \boxed{N = 0}$ CQFD

7) Via le théorème de décomposition de noyaux.

Les $(X-\lambda_i)^{r_i}$ sont deux à deux premiers entre eux

et $\chi_u(u) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = \mathbb{K}^p$

Alors d'après le thm de décomposition des noyaux

On tire $\mathbb{K}^p = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{Ker}(u-\lambda_i\, id_{\mathbb{K}^p})^{r_i}}_{=C_i}$

8) a) v commute avec $v \Rightarrow Q(v)$ commute avec v

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(Q(v))$ stable par v.

b) Posons $Q(X) = (X-\lambda_i)^{r_i}$.

On a u commute avec $Q(u)$

(a) $\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Ker}(Q(u))}_{C_i}$ stable par u.

9) On a : $\left(\forall x \in C_i,\ (u-\lambda_i\, id_{\mathbb{K}^p})^{r_i}(x) = 0\right)$

$\Rightarrow \forall x \in C_i,\ (u_{C_i} - \lambda_i\, id_{C_i})^{r_i}(x) = 0$

$\Rightarrow (u_{C_i} - \lambda_i\, id_{C_i})^{r_i} = 0$ CQFD

10) On a $u_{C_i} = \lambda_i\, id_{C_i} + \underbrace{(u_{C_i} - \lambda_i\, id_{C_i})}_{\text{noté } n_i}$

n_i est nilpotent.

Pour tout $1 \leq i \leq k$, on a :

$\underset{B_i}{\mathrm{mat}}(u_{C_i}) = \lambda_i I_{p_i} + N_i$; où $N_i = \underset{B_i}{\mathrm{mat}}(n_i)$

N_i est une matrice nilpotente car n_i l'est.

Soit $B_0 = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \dots \oplus C_k$.

Alors $\begin{cases} \underset{B_0}{\mathrm{mat}}(u) = \mathrm{diag}\left(\underset{B_1}{\mathrm{mat}}(u_{C_1}); \dots ; \underset{B_k}{\mathrm{mat}}(u_{C_k})\right) \\ \text{Car les } C_k \text{ sont des sous-espace supplémentaires} \\ \text{de } \mathbb{K}^p \text{ et stables par } u. \end{cases}$

$\underset{B_i}{\mathrm{mat}}(u_{C_i}) = \lambda_i I_{p_i} + N_i \Longrightarrow \underset{B_0}{\mathrm{mat}}(u) = \mathrm{diag}\left(\lambda_1 I_{p_1} + N_1 ; \dots ; \lambda_k I_{p_k} + N_k\right)$

$$\boxed{\Longrightarrow \overbrace{\underset{B}{\mathrm{mat}}(u)}^{=A} = P.\mathrm{diag}\left(\lambda_1 I_{p_1} + N_1 ; \dots ; \lambda_k I_{p_k} + N_k\right).P^{-1}}$$
où P la matrice de passage de B à B_0 ■

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, m.qu'il existe $\Delta \in M_p(\mathbb{K})$ tq $A = \Delta^n$:

$\forall 1 \leq i \leq k, \exists \Delta_i \in M_{p_i}(\mathbb{K}) \;/\; \lambda_i I_{p_i} + N_i = \cancel{\Delta_i^n}$

$10) \Rightarrow A = P.\mathrm{diag}(\Delta_1^n, \dots, \Delta_k^n).P^{-1}$

$\Rightarrow A = \left(P.\mathrm{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_k) P^{-1}\right)^n$ CQFD

12) a) La division euclidienne de $V(x)$ par X^p implique l'existence de $Q(x)$ et de $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{V(X) = X^p \cdot Q(X) + (a_0 + a_1 X + \cdots + a_{p-1} X^{p-1})} \quad \Omega$$

Pour terminer, il suffit de montrer que $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe i tq $a_i \neq 0$.

Soit j le plus petit des i vérifiant $a_i \neq 0$.

Alors $a_j \neq 0$ et $(\forall i < j,\ a_i = 0)$

$$\Omega \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ V(x) = x^p Q(x) + (a_j x^j + \cdots + a_{p-1} x^{p-1})$$

$$\Longrightarrow \varepsilon(x) \cdot x^p \underset{x \to 0}{=} x^p Q(x) + (a_j x^j + \cdots + a_{p-1} x^{p-1})$$

$$\xrightarrow[\text{par } x^j]{\text{Par division}} \underbrace{x^{p-j}}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0 \text{ car } p-j \geq 1}} \cdot \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{=} \underbrace{x}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}} Q(x) + \big(a_j + \underbrace{a_{j+1} x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1-j}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}\big)$$

Par passage à la limite "$x \to 0$", on obtient $\boxed{a_j = 0}$

Ce qui est absurde

b) Le développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 de la fonction $(1+x)^{\frac{1}{n}}$ donne l'existence d'un polynôme U de degré $\leq p$ tel que :

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} \underset{x \to 0}{=} U(x) + o(x^p)$$

$$\Longrightarrow (1+x) \underset{x \to 0}{=} (U(x) + o(x^p))^n \underset{x \to 0}{=} (U(x))^n + o(x^p)$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit U le polynôme trouvé dans b/ tel que : $1+x \underset{x \to 0}{=} (U(x))^n + o(x^p)$

Considérons le polynôme $V(X) = (1+X) - U^n$

On a $V(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^p)$

D'où d'après a/, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\boxed{V = X^p Q}$

Càd : $\boxed{1 + X = U^n + X^p Q}$

13) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que : $\left(\exists B \in M_p(\mathbb{K}) \;/\; I_p + N = B^n\right)$

12/c°/ $\Rightarrow \exists\, Q, U \in \mathbb{R}[X] \;/\; 1 + X = U^n + X^p \cdot Q$

D'où $I_p + N = (U(N))^n + \underbrace{N^p}_{=0} \cdot Q(N) = (U(N))^n = B^n$

avec $B = U(N)$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'il existe une matrice B telle que :

$$\lambda I_p + N = B^n$$

λ TP$\mathbb{K}$ $\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{K} \;/\; \lambda = b^n$

Et on a : $\lambda I_p + N = \lambda\left(I_p + \frac{1}{\lambda} N\right)$

Or $\left(\frac{1}{\lambda} N\right)$ nilpotente, alors d'après 13/a°/, $\left(I_p + \frac{1}{\lambda} N\right)$ est TP$\mathbb{K}$

$\Longrightarrow \exists\, C \in M_p(\mathbb{K}) \;/\; I_p + \frac{1}{\lambda} N = C^n$

D'où $\lambda I_p + N = \underbrace{\lambda}_{=b^n} \underbrace{\left(I_p + \frac{1}{\lambda} N\right)}_{=C^n} = (bC)^n = B^n$; avec $B = bC$

14) a°) Soit A une matrice inversible de $M_p(\mathbb{C})$.

Montrons que A est TP$\mathbb{C}$:

On a $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}$.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ses valeurs propres (distinctes).

10°/ $\Longrightarrow$ A s'écrit sous la forme : $P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$

où les N_i nilpotentes.

D'après 11°/, pour montrer que A est TP$\mathbb{C}$, il suffit de vérifier que : $\left(\forall\, 1 \leq i \leq k,\; (\lambda_i I_{p_i} + N_i) \text{ est TP}\mathbb{C}\right)$

Or $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ (car A inversible et $\lambda_i \in Sp(A)$)

et λ_i est TP$\mathbb{C}$ (d'après 1°/ c°/, $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$)

Enfin 13/b°/ $\Longrightarrow$ $(\lambda_i I_{p_i} + N_i)$ est TP$\mathbb{C}$

b) Si $p=1$: OUI, toute matrice de $M_1(\mathbb{C})$ est TP $\mathbb{C}$ (1°/c°/)

Si $p \geq 2$: NON ; en effet :

On prend une matrice N de $M_p(\mathbb{C})$, nilpotente et non nulle.

N n'est pas TP $\mathbb{C}$, d'après 6°/b°/

15°) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2019 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2019 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2019 \end{pmatrix}$ convient. En effet :

$\longrightarrow$ A non inversible (clair)

$\longrightarrow$ A non diagonalisable :

$\chi_A(X) = X(X-2019)^3$; $Sp(A) = \{0, 2019\}$

$rg(A - 2019.I_4) = rg \begin{pmatrix} -2019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

thm. du rang $\Longrightarrow$ $\boxed{\dim(E_{2019}(A)) = 2 \neq m_{2019}(A)}$

$\longrightarrow$ A est TP $\mathbb{R}$: En effet :

$A = diag(0, 2019.I_3 + N)$; où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente

13)b°) $\Rightarrow$ $(2019.I_3 + N)$ est TP $\mathbb{R}$ car 2019 l'est.

D'où $\boxed{A = diag(0, 2019.I_3+N) \text{ TP}\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Autre exemple : via les matrices de rotations et que } (R_\theta)^n = R_{n\theta}}$

$A = \mathrm{diag}(R_{\frac{\pi}{2}}, O_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient :

→ A non diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $\chi_A(X) = X^2(X^2+1)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$

→ A n'est pas inversible (claire)

→ ATP$\mathbb{R}$;

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{diag}(R_{\frac{\pi}{2}}, O_2) = \left(\mathrm{diag}(R_{\frac{\pi}{2n}}, O_2)\right)^n$

Fin