Espaces préhilbertiens réels
Résumé

E sera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou non)

I) Généralités

1) Produit scalaire

Déf

On appelle produit scalaire sur E toute application ϕ de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall x, x' \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \phi(\alpha x + x', y) = \alpha \phi(x, y) + \phi(x', y)$

« ϕ est dite linéaire par rapport à la $1^{\text{ère}}$ place »

2) $\forall x \in E, \forall y, y' \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \phi(x, \alpha y + y') = \alpha \phi(x, y) + \phi(x, y')$

« ϕ est dite linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ place »

3) $\forall x, y \in E, \ \phi(x, y) = \phi(y, x)$

« ϕ est dite symétrique »

4) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \ \phi(x, x) > 0$

« ϕ est dite définie positive »

Prop

$\left(\phi \text{ est un produit scalaire sur } E \right) \iff \begin{cases} 1) \ \phi \text{ est symétrique} \\ 2) \ \phi \text{ est linéaire par rapport à la } 1^{\text{ère}} \text{ place} \\ 3) \ \forall x \in E, \ \phi(x, x) \geq 0 \\ 4) \ \forall x \in E, \ \phi(x, x) = 0 \implies x = 0 \end{cases}$

Produits scalaires usuels : (à savoir démontrer)

a) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) Produit scalaire usuel sur $C([a,b], \mathbb{R})$

Pour f et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$. $(a < b \in \mathbb{R})$.

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

c) Produit scalaire usuel sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques.

Pour f et $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

d) Produit scalaire usuel sur $M_{n1}(\mathbb{R})$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_{n1}(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tX \cdot Y$$

e) Produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A | B \rangle = tr({}^tA \cdot B)$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\langle A | B \rangle = tr({}^tA \cdot B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ij} B_{ij}$$

où $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$

Déf

1) Un $\mathbb{R}$-esp vect muni d'un produit scalaire s'appelle espace préhilbertien réel.

2) Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle espace euclidien.

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

1) $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

5) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle$

6) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y\rangle$

Prop

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y, z \in E$. On a :

1) $d(x,y) = d(y,x)$

2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire)

Prop (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

1) $\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$ (c'est l'ICS)

2) $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle \iff (x,y)$ liée

NB :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$\boxed{\langle x|y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2}$ ou encore $\boxed{|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|}$

Corollaire (L'inégalité triangulaire)

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel. On a :

$$\forall x, y \in E, \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Prop

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel. Soient $x, y \in E$, on a :

1) $\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

« l'identité de polarisation »

2) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

« l'identité du parallelogramme »

2) Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf

Soient $x, y \in E$.

x et y sont dits orthogonaux si et ssi $\langle x|y\rangle = 0$.

Déf

Soient $A \subset E$ et $x \in E$.

x est dit orthogonal à A si et ssi x est orthogonal à tout élément de A.

$$x \in A^{\perp} \underset{\text{par définition}}{\iff} \left(\forall a \in A, \langle x|a\rangle = 0\right)$$

Prop

1) i) $\forall x \in E, \langle x|0\rangle = 0$

ii) $\{0\}^{\perp} = E$

2) i) $\left(\forall x \in E, \langle a|x\rangle = 0\right) \iff a = 0$

ii) $E^{\perp} = \{0\}$

Prop

Soit $A \subset E$.

$A^\perp$ est un sev de E.

Déf

Soient F et G deux sev de E.

F et G sont dits orthogonaux si et ssi tout élément de F est orthogonal à tout élément de G.

Autrement dit

$(F$ et G sont dits orthogonaux$) \Leftrightarrow (\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x|y\rangle = 0)$

Prop

Soient F et G deux sev de E.

1) $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$

2) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) F et G sont orthogonaux.

ii) $F \subset G^\perp$

iii) $G \subset F^\perp$

3) Famille orthogonale

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf

Un vecteur x de E est unitaire si et ssi $\|x\| = 1$

Déf

1) Une famille de vecteurs de E est dite famille **orthogonale** si et ssi ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

2) Une famille de vecteurs de E est dite famille **orthonormale** si et ssi elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont unitaires.

Prop

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

1) $\mathcal{F}$ est orthogonale $\iff (\forall i \neq j, \langle x_i | x_j \rangle = 0)$

2) $\mathcal{F}$ est orthonormale $\iff (\forall i, j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij})$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$: le symbole de Kronecker.

Prop

1) Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.

2) Toute famille orthonormale est libre.

Prop

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle$$

⚠ Attention à cette erreur

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i \rangle$$

C'est en général FAUX !!

Prop

$\mathcal{F}=(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de E.

Soient $x=\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ deux vecteurs de E.

1) Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, on a :

$$\langle x|y\rangle=\sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i|e_i\rangle=\sum_{i=1}^{p} x_i y_i \|e_i\|^2$$

2) Si $\mathcal{F}$ est orthonormale, on a :

i) $\langle x|y\rangle=\sum_{i=1}^{p} x_i y_i$

ii) $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Prop

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E.

$$\boxed{\forall x\in E,\quad x=\sum_{i=1}^{n}\langle x|e_i\rangle e_i}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Si } x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ alors } (\forall i,\ x_i=\langle x|e_i\rangle)}$$

Prop (Théorème de Pythagore)

1) Soient $x,y\in E$, on a :

$(x \text{ et } y \text{ orthogonaux}) \iff \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

2) Soit $n\geq 2$.

$(x_1,\dots,x_n)$ famille orthogonale $\Longrightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$

4) Procédé d'orthonormalisation de Gram_Schmidt

Prop

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$x \in \left(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)\right)^{\perp} \Leftrightarrow \left(\forall\, 1 \leq i \leq p,\ \langle x | e_i \rangle = 0\right)$$

Prop (Principe d'orthonormalisation de Gram_Schmidt)

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E.

A) Il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ vérifiant :

☆ $\forall\, 1 \leq i \leq p,\ \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$

☆ $\forall\, 1 \leq i \leq p,\ \langle x_i | e_i \rangle > 0$

B) Cette famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ s'obtient par le procédé de Gram_Scmidt suivant : (Procédé à retenir !)

Étape 1 $\quad e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Étape 2 $\quad \begin{cases} U_2 = x_2 - \langle x_2 | e_1 \rangle e_1 \\ e_2 = \dfrac{U_2}{\|U_2\|} \end{cases}$

Étape 3 $\quad \begin{cases} U_3 = x_3 - \left(\langle x_3 | e_1 \rangle e_1 + \langle x_3 | e_2 \rangle e_2\right) \\ e_3 = \dfrac{U_3}{\|U_3\|} \end{cases}$

$\vdots$

Étape p $\quad \begin{cases} U_p = x_p - \left(\langle x_p | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_p | e_{p-1} \rangle e_{p-1}\right) \\ e_p = \dfrac{U_p}{\|U_p\|} \end{cases}$

Corollaire

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E (E étant esp euclid de dim n), Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ construite via le procédé de Gram-Scmidt est une bon de E.

Corollaire (Existence d'une bon dans un esp euclidien)

Tout espace euclidien possède au moins une bon.

Corollaire

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbertien réel.

Tout sev de dimension finie de E possède une bon.

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E. On a :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Prop

Soient E un espace euclidien de dim n et F un sev de E. On a

1) $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$

2) $F^{\perp\perp} = F$

Prop

E esp euclidien.

1) Supp que $E = F \oplus F^{\perp}$

Si B_1 bon de F et B_2 bon de $F^{\perp}$

Alors $B_1 \cup B_2$ est une bon de E.

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$

2) En général, supp que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où les F_i sont deux à deux orthogonaux.

Si $B_1, \dots, B_p$ des bon respectives de $F_1, \dots, F_p$

Alors $\bigcup_{i=1}^{p} B_i$ est une bon de E.

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

Prop (Théorème de la base orthonormée incomplète)

E esp euclidien de dimension finie $n \geq 1$.

Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille orthonormée de E, alors il existe $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n \in E$ tels que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ soit une bon de E.

5) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf

Soit F un sev de dim finie de E.

On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.

La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Prop

Soient F un sev de dim finie de E, et $(e_1, \dots, e_p)$ une bon de F.

On a :

$$\forall x \in E, \ P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i$$

où $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

Prop (Inégalité de Bessel)

Soit F un sev de dim finie de E. On a :

$$\forall x \in E,\ \|P_F(x)\| \leq \|x\|$$

Prop

Soit F un sev de dim finie de E.

Soient $x, a \in E$, on a :

$$P_F(x) = a \iff \begin{cases} a \in F \\ (x-a) \in F^{\perp} \end{cases}$$

6) Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie.

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf

Soit F un sev de dim finie de E. Soit $x \in E$.

La distance de x à F est :

$$d(x,F) = \inf(\{d(x,y) \,/\, y \in F\})$$

Càd

$$d(x,F) = \inf_{y \in F}(\|x-y\|)$$

Prop

Soit F un sev de dim finie de E. Soit $x \in E$.

1) $d(x,F) = d(x, P_F(x))\ \left(= \|x - P_F(x)\|\right)$

2) $P_F(x)$ est l'unique vecteur y de F vérifiant $d(x,F) = \|x-y\|$.

3) $d(x,F) = 0 \iff x \in F$

7) Hyperplan dans un espace euclidien

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est ici un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

Soit H un hyperplan de E.

On rappelle que $\dim(H) = n-1$.

On sait aussi que $H^{\perp}$ est une droite de E $\left(\dim H^{\perp} = n - \dim H = 1\right)$

Déf

Tout vecteur non nul de la droite $H^{\perp}$ s'appelle vecteur normal à l'hyperplan H.

Autrement dit :

Soit $u \in E \setminus \{0\}$.

$$\boxed{u \text{ vecteur normal à } H \iff H^{\perp} = \mathrm{vect}(u) \iff u \in H^{\perp} \iff H = (\mathrm{vect}(u))^{\perp}}$$

Prop

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation cartésienne :

$$H : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

dans la base B.

$u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ est un vecteur normal à l'hyperplan H.

8) Symétrie orthogonale – Réflexion

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E.

On sait que : $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$

Déf :

1) La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la symétrie orthogonale par rapport à F.
2) La symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H est dite réflexion par rapport à H.

9) Automorphismes orthogonaux – Matrices orthogonales

a) Automorphismes orthogonaux

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Déf

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est dit endomorphisme orthogonal de E si et ssi :

$$\boxed{\forall x \in E, \; \|f(x)\| = \|x\|}$$

Prop

Tout endomorphisme orthogonale est inversible.

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{f \in O(E) \iff \left(\forall x, y \in E, \; \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle\right)}$$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $f \in O(E) \iff f$ transforme toute bon de E en une bon de E.

2) $f \in O(E) \iff f$ transforme une bon de E en une bon de E.

Prop

$(O(E), \circ)$ est un groupe. (dit groupe orthogonal)

b) Matrices orthogonales

Déf

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est dite orthogonale si et ssi ${}^tA . A = I_n$

Prop

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $A \in O_n(\mathbb{R})$

2) ${}^tA . A = I_n$

3) A inversible et $A^{-1} = {}^tA$

4) $A . {}^tA = I_n$

Prop

$A \in O_n(\mathbb{R}) \iff {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$

Produit scalaire usuel sur $M_{n1}(\mathbb{R})$:

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\langle X | Y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

À retenir

$$\langle X|Y\rangle = {}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Prop

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. On a :

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est une bon de $M_{n1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

Corollaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. On a :

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et ssi $(L_1, \dots, L_n)$ est une bon de $M_{1n}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

Prop

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Soit B une bon de E.

Soit S une famille de cardinal n. On a :

$$\boxed{\underset{B}{\mathrm{mat}}(S) \in O_n(\mathbb{R}) \iff S \text{ est une bon de } E}$$

Corollaire

Soit E un espace euclidien.

La matrice de passage d'une bon à une bon est une matrice orthogonale.

Prop

Soit E un esp euclidien de dimension n.

Soit B une bon de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E)}$$

Prop

1) $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1, 1\}$

2) $\forall f \in \mathcal{O}(E)$, $\det(f) \in \{-1, 1\}$

Déf

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1) Si $\det(A) = 1$, A est dite matrice orthogonale positive.

2) Si $\det(A) = -1$, A est dite matrice orthogonale négative.

3) $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, ou $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $S\mathcal{O}(n)$ désignera l'ensemble des matrices orthogonales positives.

4) $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ désignera l'ensemble des matrices orthogonales négatives.

Déf

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, où $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1) Si $\det(f) = 1$, f est dit endomorphisme orthogonal positif. Il s'appelle aussi isométrie directe.

2) Si $\det(f) = -1$, f est dit endomorphisme orthogonal négatif. Il s'appelle aussi isométrie indirecte.

3) $\mathcal{O}^+(E)$ ou $S\mathcal{O}(E)$ désignera l'ensemble des isométries directes.

4) $O^-(E)$ désignera l'ensemble des isométries indirectes.

Prop

1) $(SO_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

Il s'appelle le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

2) Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

$(SO(E), \circ)$ est un groupe.

Il s'appelle le groupe spécial orthogonal sur E.

Prop

Soit S une bond de E.

Soit B une bon de E. On a :

1) B est une bond $\Longleftrightarrow \det_S(B) = 1$

2) B est une bon indirecte $\Longleftrightarrow \det_S(B) = -1$

Prop et déf

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ étant un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

1) Si B_1 et B_2 deux bond, alors :

$$\det_{B_1}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B_2}(x_1, \dots, x_n)$$

2) Le produit mixte des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est le réel $[x_1, \dots, x_n]$ défini par :

$$\boxed{[x_1, \dots, x_n] = \det_B(x_1, \dots, x_n)}$$

où B est une bond de E.

11) Description de $O_2(\mathbb{R})$

Prop

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $A \in \mathcal{O}(2)$

2) A est de l'une des formes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a^2+b^2=1$.

3) A est l'une des formes $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

Corollaire

1) $\mathcal{O}^+(2) = \{R_\theta \,/\, \theta \in \mathbb{R}\}$; où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2) $\mathcal{O}^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Prop

1) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$

2) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, R_θ et $R_{\theta'}$ commutent.

3) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$

4) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $(R_\theta)^m = R_{m\theta}$

12) Description des isométries dans un plan euclidien

$(E_2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ désignera dans ce paragraphe un plan euclidien orienté.

Prop

Dans le plan euclidien orienté E_2, les isométries directes sont les rotations.

Autrement dit

Soit $f \in \mathcal{L}(E_2)$. On a :

$f \in \mathcal{O}^+(E_2) \Leftrightarrow f$ est une rotation

Prop

Dans le plan euclidien E_2, les isométries indirectes sont les réflexions.

Autrement dit

Soit $f \in \mathcal{L}(E_2)$. On a :

f est une isométrie indirecte $\Leftrightarrow$ f est une réflexion.

Résumé :

Soit E_2 un esp euclidien orienté.

1) Les isométries directes sont les rotations.
2) Les isométries indirectes sont les réfléxions.
3) Les isométries sont les rotations et les réflexions.
4) La composée de deux rotations est une rotation.
5) La composée de deux réflexions est une rotation.
6) La composée d'une réflexion et d'une rotation est une réflexion.
7) Les rotations commutent ; $(\mathcal{O}^+(E_2), \times)$ est un groupe abelien.
8) Toute isométrie peut être écrite comme composée de réflexions.

Autrement dit :

Le groupe $(O^+(E_2), \times)$ est engendré par les réflexions.

(Voir Chap 1 " structures algébriques ")

13) Réduction d'une isométrie en dimension finie

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ sera un esp euclidien de dimension finie $n \geq 1$.

Prop

Soient $f \in O(E)$ et F un sev de E.

1) Si F est stab. par f alors $F^\perp$ l'est aussi.

2) $Sp(f) \subset \{-1, 1\}$

Prop

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in O(E)$.

Il existe une bon de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de l'une des formes : R_θ, 1 ou (-1)

Corollaire (version matricielle)

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice orthogonale P et une matrice D, diagonale par blocs de l'une des formes R_θ, 1 ou (-1), telles que :

$$\boxed{A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP}$$

14) Isométries directes dans un espace euclidien de dimension 3

Prop

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp euclidien orienté de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{f \text{ est une isométrie directe} \iff f \text{ est une rotation}}$$

15) Détermination pratique d'une rotation en dimension 3

E est un esp euclidien orienté de dimension 3.

f est une rotation sur E.

On verra ici une méthode pratique pour déterminer les éléments caractéristiques de cette rotation :

$$\boxed{\text{L'angle } \theta \text{ et le vecteur unitaire } e_1}$$

a) Détermination de e_1

Via $f(x) = x \iff \ldots$

On trouve un vecteur $x_0 \neq 0$ vérifiant $f(x_0) = x_0$.

On prend $e_1 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$

b) Détermination de l'angle θ

i) Détermination de $\cos(\theta)$

$$2\cos\theta + 1 = \underbrace{tr(f)}_{\text{connue}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \ldots}$$

ii) Détermination du signe de $\sin\theta$

Règle (à retenir et appliquer)

On prend un vecteur $x \notin vect(e_1)$.
Le signe de $\sin(\theta)$ est celui du produit mixte $[e_1, x, f(x)]$.

Endomorphismes symétriques

1) Généralités

Déf

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est un endomorphisme symétrique si et ssi :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

Prop

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit B une bon de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f endomorphisme symétrique de E

2) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est une matrice symétrique.

Prop

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.
$S(E)$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique.
$\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux.

C'àd : $\left(\ker(f)\right)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique.

Si F est un sev stable par f, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par f.

Prop

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien

1) Supp que f est un projecteur de E. On a :

$$\boxed{f \text{ est projecteur orthogonal} \iff f \text{ est endomorphisme symétrique}}$$

2) Supp que f est une symétrie de E. On a :

$$\boxed{f \text{ est symétrie orthogonale} \iff f \text{ est endomorphisme symétrique}}$$

2) Le théorème spectral

Prop (théorème spectral)

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Si f est un endomorphisme symétrique, alors E possède une bon formée de vecteurs propres de f.

Corollaire (théorème spectral matriciel)

Si A est une matrice symétrique réelle d'ordre n, alors :

1) Il existe une matrice diagonale réelle D, et une matrice orthogonale P telles que :

$$\boxed{A = P D \, {}^{t}P}$$

2) Il existe une bon $(E_1, \dots, E_n)$ de $M_{n1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A ; $M_{n1}(\mathbb{R})$ étant muni de son produit scalaire usuel.

3) Les sous-espace propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

III) Adjoint d'un endomorphisme

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera dans ce paragraphe un espace euclidien de di

1) Théorème de représentation de Riesz

Notation

Soit $a \in E$. L'application $x \mapsto \langle a | x \rangle$ est une forme linéaire su

On la notera $\langle a | \cdot \rangle$.

Prop (théorème de Riesz)

$$\forall \varphi \in E^*, \exists! \, a \in E, \ \varphi = \langle a, \cdot \rangle$$

---

2) Adjoint d'un endomorphisme

Prop et déf :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \ \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$$

2) f^* s'appelle l'adjoint de f.

Prop

1) $\forall f \in S(E),\ f^* = f$

2) $\forall f \in O(E),\ f^* = f^{-1}$

3) $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall B$ bon de E, on a

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f^*) = {}^t\left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)$$

Fin